Лемма Саваямы

Лемма Саваямы. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка S. Окружность ω касается отрезков BS и AS в точках P и Q соответственно и окружности (ABC). Тогда прямая PQ проходит через центр I вписанной окружности треугольника ABC.

1. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, AL — биссектриса. На малой дуге AB окружности (ABC) выбрана точка X. Окружность ω касается отрезка BC в точке P, а окружности (ABC) — в точке X. Прямая IP повторно пересекает ω в точке Q.
(а) Докажите, что точки A, L, P, X лежат на одной окружности.
(б) Докажите, что точки A, I, Q, X лежат на одной окружности.
(в) Докажите лемму Саваямы.
(г) Прямая AQ пересекает сторону BC в точке S. Докажите, что окружность (AQX) проходит через центр вписанной окружности треугольника ABS и через центр вневписанной окружности треугольника ACS со стороны вершины C.

У леммы Саваямы можно нарисовать много разных картинок. Окружность ω может располагаться в других частях плоскости, прямая через вершину A может пересекать продолжение отрезка BC (или быть параллельной BC). Утверждение останется верным, только, возможно, центр вписанной окружности нужно заменить на центр вневписанной окружности. Часть картинок нарисована ниже. Чтобы для зафиксированной конфигурации понимать, какой именно из центров окружностей лежит на этой прямой, кажется, нет ничего лучше, кроме как повторять доказательство.

2. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABD и ACD, центры вневписанных окружностей треугольников ABC и BCD, соответствующие вершинам C и B соответственно, лежат на одной прямой.

3. **(а)** К окружностям с центрами в точках O_1 и O_2 провели общую внутреннюю касательную A_1A_2 и общую внешнюю касательную B_1B_2 (точки A_1 и B_1 принадлежат окружности с центром O_1). На отрезках A_1A_2 и B_1B_2 как на диаметрах построили окружности. Докажите, что прямая O_1O_2 — радикальная ось этих окружностей.
(б) **Теорема Тебо.** На стороне BC треугольника ABC выбрана точка S. В криволинейные треугольники ASB и ASC вписано по окружности. Докажите, что линия центров этих окружностей проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

В следующих задачах дан вписанный в окружность Ω четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке S. Окружность ω касается отрезков AS и BS и Ω в точке X.

4. Окружность ω_1 касается отрезков AD и BC и окружности Ω в точке на дуге AB. Докажите, что точка касания Ω с ω_1 — это точка X.

5. Окружность γ вписана в криволинейный треугольник SCD.
(а) Докажите, что радикальная ось ω и γ проходит через середины малых дуг AD и BC.

(б) Докажите, что общие внешние касательные к ω и γ параллельны прямым AD и BC.

6. Докажите, что биссектриса угла CXD проходит через центр вписанной окружности треугольника CSD.

7. Лучи CB и DA пересекаются в точке E. Докажите, что прямая, проходящая через центры вписанных окружностей треугольников ABS и ABE, и прямая, проходящая через центры вписанных окружностей треугольников CDS и CDE, пересекаются на Ω.