По мотивам ММО

1. Алиса записала положительные числа a, b, c, d, e (не обязательно целые), а Маруся — числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{e}$. Оказалось, что сумма чисел Алисы больше суммы чисел Маруси. Могло ли произведение чисел Алисы оказаться меньше произведения чисел Маруси?

2. Каждую грань правильного октаэдра разбили средними линиями на правильные треугольники (всего получилось 32 одинаковых маленьких правильных треугольника). Какое наибольшее число этих треугольников можно закрасить так, чтобы закрашенные треугольники не имели общих вершин?

3. **(а)** Король решил испытать своего придворного мудреца. Он выложил 144 внешне одинаковые золотые монеты в виде квадрата 12×12 и сообщил, что среди них ровно 12 фальшивых монет, которые лежат в ряд (по горизонтали или по вертикали). Все настоящие монеты весят одинаково, а фальшивые могут весить по-разному, но каждая из них легче настоящей. Король просит найти 100 настоящих монет за два взвешивания на чашечных весах без гирь. Может ли мудрец действовать так, чтобы гарантированно справиться с заданием короля?
(б) А 110 монет?
(в) Какое наибольшее количество монет можно найти?

4. На столе лежат 11 арбузов массами 1, 2, 3, ..., 11 кг. Алёна и Богдан раскладывают арбузы в четыре пакета; каждый пакет выдерживает 14 кг, а от большего веса рвётся. Они по очереди выбирают арбуз со стола и кладут его в любой из пакетов так, чтобы пакет не порвался. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Начинает Алёна. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл другой?

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и BC равны, K — точка пересечения диагоналей. Описанная окружность треугольника ABD повторно пересекает сторону BC в точке Y, а описанная окружность треугольника BCD повторно пересекает сторону AB в точке X. Докажите, что $\angle AKX = \angle CKY$.

6. Существует ли такое бесконечное множество S натуральных чисел, что для любых двух различных x и y из S найдётся z из S (не обязательно отличное от x и y), для которого $x^2 + y^2 + z^2$ — квадрат натурального числа?

7. В гостинице $a > 1$ этажей, на каждом этаже b одноместных номеров. На математический конгресс приехало ab математиков. Оказалось, что каждому математику на каждом этаже нравится ровно один номер. Докажите, что число способов поселить всех математиков в гостиницу так, чтобы каждому нравился его номер, чётно.