

## Максимальное паросочетание

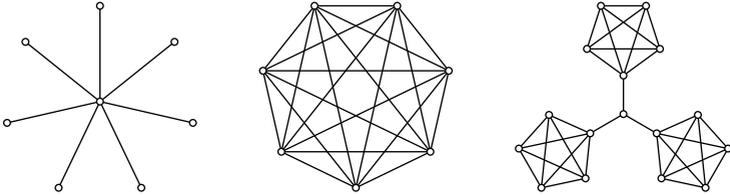
- (Лемма Бергса) В графе  $G$  выделено паросочетание — несколько попарно непересекающихся рёбер. Рёбра этого паросочетания покрашены в красный цвет, а все остальные — в синий. Назовём простую цепь *удлиняющей цепью*, если в ней чередуются цвета рёбер, а из обоих концов не исходит никаких красных рёбер.

(а) Докажите, что если выделенное паросочетание — максимальное, то в графе  $G$  нет удлиняющих цепей.

(б) Докажите, что если в графе  $G$  нет удлиняющих цепей, то выделенное паросочетание — максимальное.
- (а) Дана клетчатая доска  $9 \times 9$ , двое играют в игру. Первый игрок выбирает произвольную клетку доски и ставит туда фишку. Далее игроки поочерёдно, начиная со второго, каждым своим ходом перемещают фишку в соседнюю по стороне клетку; при этом запрещено перемещать фишку в клетку, в которой она уже побывала. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

(б) Та же игра, но на произвольном графе с 81 вершиной.
- В классе 30 детей, каждый дружит не меньше чем с 15 одноклассниками. Докажите, что всех детей можно построить парами так, чтобы в каждой паре дети дружили.
- Граф  $G$  имеет  $n$  вершин одинаковой ненулевой степени. Докажите, что в нём можно выделить не менее  $n/3$  попарно непересекающихся рёбер.
- В компании из 100 человек среди любых 50 найдётся тот, кто знает 49 остальных. Докажите, что из компании можно выделить 52 попарно знакомых.
- На научный конгресс приехали  $2n$  участников, каждый из которых имеет среди других участников ровно  $n - 1$  знакомых. При каких  $n$  всех участников можно гарантированно разбить на пары так, чтобы люди в каждой паре были знакомы?

7. В вершинах графа, изображённого на рисунках (а), (б), (в), расставлены мудрецы, на каждого из которых надевается чёрный или белый колпак. Мудрецы видят только цвета колпаков на мудрецах в соседних вершинах. Все мудрецы одновременно пытаются угадать цвет своего колпака. Какое наибольшее число угадываний смогут себе гарантировать мудрецы?



- (г) Докажите, что для любого двудольного графа наибольшее число гарантированных угадываний равно размеру максимального паросочетания.  
 (д) Докажите, что для произвольного графа  $G$  и для любого подмножества  $U$  множества  $V$  его вершин число гарантированных угадываний не превосходит величины  $\frac{1}{2}(|U| - \text{odd}(G \setminus U) + |V|)$ , где  $\text{odd}(G \setminus U)$  — это число компонент связности нечётного размера, которые возникают в графе  $G$  после удаления из него всех вершин множества  $U$ .

**Теорема.** (Татта-Бержа) В произвольном графе  $G = (V, E)$  число рёбер в наибольшем паросочетании равно

$$\min_{U \subset V} \frac{1}{2} (|U| - \text{odd}(G \setminus U) + |V|).$$

8. Связный граф на  $n$  вершинах таков, что при удалении любой вершины размер максимального паросочетания не меняется. Докажите, что в максимальном паросочетании  $\frac{n-1}{2}$  рёбер.