

Why-точка

Дан остроугольный треугольник ABC . В нём

- AD — высота, H — ортоцентр;
- P — точка на окружности (ABC) такая, что $AP \parallel BC$;
- T — пересечение касательной в точке A к (ABC) с прямой BC ;
- K, L — середины отрезков AB и AC , M — точка пересечения медиан;
- E — пересечение прямой, проходящей через основания высот из вершин B и C , с прямой BC .

Точка Y_a пересечения луча MD с (ABC) называется *Why-точкой* треугольника ABC со стороны вершины A . Аналогично можно определить точки Y_b и Y_c .

1. (а) Докажите, что точки D, P, M, Y_a лежат на одной прямой.
(б) Произвольная прямая, проходящая через точку A , пересекает сторону BC в точке U , а окружность (ABC) — в точке V . Докажите, что точки D, Y_a, V, U лежат на одной окружности.
2. Точка D_1 на стороне BC такова, что $BD = CD_1$. Докажите, что AY_a и AD_1 — изогонали относительно угла A .
3. (а) Докажите, что точки A, D, Y_a, T лежат на одной окружности.
(б) Докажите, что точка пересечения этой окружности с отрезком KL лежит на биссектрисе угла A треугольника.
4. Докажите, что окружности (KLY_a) и (ABC) касаются.
5. (а) Докажите, что точки E, H, D, Y_a лежат на одной окружности.
(б) Обозначим окружность из предыдущего пункта через ω_a . Аналогично определим окружности ω_b и ω_c . Докажите, что прямая Эйлера треугольника ABC является их общей радикальной осью.
(в) Докажите, что прямая, проходящая через Y_a и середину отрезка DE , проходит через точку, симметричную H относительно BC .
(г) Докажите, что прямая EY_a проходит через точку пересечения AM с (ABC) .
(д) Докажите, что прямая Y_bY_c проходит через точку E .
6. (а) Докажите, что прямые AY_a, BY_b, CY_c пересекаются в одной точке, лежащей на прямой Эйлера треугольника ABC .
(б) Докажите, что эта точка является центром гомотетии, которая переводит ортотреугольник в треугольник, ограниченный касательными к (ABC) в точках A, B, C .