Cool ratio lemma

На плоскости даны точки X и Y. Одну из двух полуплоскостей, на которые XY делит плоскость, будем считать отрицательной.

Определение. *Cool-ratio функцией* назовём функцию $f_{XY}(A)$ из $\mathbb{R}^2 \setminus Y$ в $\mathbb{R}$, равную по модулю XA/YA и взятую со знаком «$-$», если A лежит на отрезке XY или в отрицательной полуплоскости и со знаком «$+$» иначе.

- Если A лежит на прямой XY, то $f_{XY}(A) = \overrightarrow{XA}/\overrightarrow{YA}$.
- Пусть ω — прямая или окружность, проходящая через точки X и Y. Тогда f_{XY} задаёт биекцию из $\omega \setminus Y$ в $\mathbb{R}$.
- Если A, B, X, Y лежат на окружности, то $(X, Y; A, B) = f_{XY}(A) : f_{XY}(B)$.
- **Cool ratio lemma.** Пусть дана окружность ω и её хорда XY. Точки A и B лежат на окружности, а точка C — на прямой XY. Тогда A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $f_{XY}(A) \cdot f_{XY}(B) = f_{XY}(C)$.

Пример *(теорема о бабочке).* В окружности ω проведена хорда XY. Через её середину M проведены хорды AB и CD. Прямые AD и BC пересекают прямую XY в точках P и Q. Тогда M — середина PQ.

Важно. Если вы собираетесь использовать эту технику на олимпиадах, то лучше вместе с решением докажите всю теорию. Или хотя бы сошлитесь на проект ЛКТГ.

1. **(а)** Пусть $AB \parallel XY$ — две различные хорды окружности, $f = f_{XY}$. Как связаны $f(A)$ и $f(B)$?
(б) Точки A, B, X, Y лежат на окружности, точки C и D лежат на прямой XY, $f = f_{XY}$. Докажите, что A, B, C, D лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $f(A)f(B) = f(C)f(D)$.
(в) Точки A, B, X, Y лежат на одной окружности, точки C, D, X, Y — на другой окружности, $f = f_{XY}$. Докажите, что A, B, C, D лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $f(A)f(B) = f(C)f(D)$.

2. На окружности (ABC) выбраны точки D и E. Прямые AD и AE пересекают прямую BC в точках X и Y. Точки D_1 и E_1 симметричны D и E относительно серединного перпендикуляра к BC. Докажите, что прямые D_1Y и E_1X пересекаются на (ABC).

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Точки P и Q на окружности (ABC) таковы, что $\angle BPD = \angle DQC = 90^\circ$. Прямые PQ и BC пересекаются в точке T. Докажите, что прямая AT касается окружности (ABC).

4. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Отрезки BE и CF пересекают отрезок AD в точках P и Q соответственно. Окружности (BQE) и (CPF) пересекают прямую AD вторично в точках X и Y соответственно. Докажите что $AY = DX$.

5. В треугольнике ABC чевианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, а точки B, C, B_1, C_1 лежат на одной окружности. Докажите, что описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ проходит через середину стороны BC.

6. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. На прямой AC берутся пары точек P, Q таких, что лучи BP и BQ — изогонали относительно угла B. Докажите, что центры окружностей (PDQ) лежат на одной прямой.

Иногда полезно рассмотреть не одну cool-ratio функцию, а несколько.

Упражнение. Подумайте, как переписать теорему Фалеса, теоремы Чевы и Менелая в терминах f_{AB}, f_{AC}, f_{BC} для треугольника ABC.

7. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекают его описанную окружность ω в точках A_2, B_2, C_2. Прямые A_2B_1 и A_2C_1 повторно пересекают ω в точках X_1 и Y_1 соответственно. Окружность $(B_1B_2X_1)$ повторно пересекает сторону AC в точке X_2, а окружность $(C_1C_2Y_1)$ повторно пересекает сторону AB в точке Y_2. Докажите, что $X_2Y_2 \parallel BC$.

8. На описанной окружности треугольника ABC выбраны точки X и Y. На сторонах BC, AC, AB нашлись соответственно точки D, E, F, такие, что отрезки XD и YD образуют равные углы со стороной BC, отрезки XE и YE образуют равные углы со стороной AC и отрезки XF и YF образуют равные углы со стороной AB. Докажите, что точки D, E, F лежат на одной прямой.

9. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к стороне BC и прямые AB, AC образуют треугольник Δ. Пусть X — точка пересечения касательных в точках B и C к окружности (ABC). Прямая AX повторно пересекает эту окружность в точке G, а M — середина стороны BC. Докажите, что описанные окружности треугольников XGM и Δ касаются.