

Рекурренты в комбинаторике

1. Сколькими способами полосу 1×8 можно замостить клетчатыми прямоугольниками 1×1 , 1×2 и 1×3 ?
2. Пусть a_n — количество способов разменять n рублей монетами по 2, 5 и 10 рублей. Найдите линейное рекуррентное соотношение для последовательности (a_n) .
3. Лягушка прыгает по вершинам треугольника ABC , перемещаясь каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из A в A за n прыжков?
4. Сколько n -разрядных десятичных чисел, которые могут начинаться с нуля,
 - (а) не содержат в своей записи двух стоящих рядом чётных цифр?
 - (б) не содержат в своей записи цифры 5 сразу после цифры 2?
5. Сколько существует несамопересекающихся ломаных длины n , начинающихся в начале координат $(0; 0)$, каждое звено которых совпадает с одним из векторов $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(0; -1)$?
6.
 - (а) Сколькими способами можно выложить клетчатый прямоугольник размера 10×3 доминошками размера 1×2 ?
 - (б) Решите задачу для прямоугольника $n \times 3$.
7. Шеренга солдат называется неправильной, если никакие три подряд стоящих солдата не стоят по росту (ни в порядке возрастания, ни в порядке убывания). Составьте рекуррентное соотношение для количества неправильных шеренг из n солдат разного роста.
8. На клетчатой доске размером $2 \times n$ клеток некоторые клетки закрашиваются в чёрный цвет. Раскраска называется правильной, если среди закрашенных нет двух соседних клеток (соседними называются клетки, имеющие общую сторону). Раскраска, в которой ни одна клетка не закрашена, тоже считается правильной. Пусть A_n — количество правильных раскрасок с чётным числом закрашенных клеток, B_n — количество правильных раскрасок с нечётным числом закрашенных клеток. Найдите все возможные значения $A_n - B_n$.