

Рекурренты в комбинаторике

1. Пусть a_n — количество способов разменять n рублей монетами по 2, 5 и 10 рублей. Найдите линейное рекуррентное соотношение для последовательности (a_n) .
2. Лягушка прыгает по вершинам треугольника ABC , перемещаясь каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из A в A за n прыжков?
3. Сколько n -разрядных десятичных чисел, которые могут начинаться с нуля,
 - (а) не содержат в своей записи двух стоящих рядом чётных цифр?
 - (б) не содержат в своей записи цифры 5 сразу после цифры 2?
4. Сколько существует несамопересекающихся ломаных длины n , начинающихся в начале координат $(0; 0)$, каждое звено которых совпадает с одним из векторов $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(0, -1)$?
5. Сколькими способами можно выложить клетчатый прямоугольник размера $n \times 3$ доминошками размера 1×2 ?
6. Шеренга солдат называется неправильной, если никакие три подряд стоящих солдата не стоят по росту (ни в порядке возрастания, ни в порядке убывания). Составьте рекуррентное соотношение для количества неправильных шеренг из n солдат разного роста.
7. На клетчатой доске размером $2 \times n$ клеток некоторые клетки закрашиваются в чёрный цвет. Раскраска называется правильной, если среди закрашенных нет двух соседних клеток (соседними называются клетки, имеющие общую сторону). Раскраска, в которой ни одна клетка не закрашена, тоже считается правильной. Пусть A_n — количество правильных раскрасок с чётным числом закрашенных клеток, B_n — количество правильных раскрасок с нечётным числом закрашенных клеток. Найдите все возможные значения $A_n - B_n$.
8. Рассмотрим круглое ожерелье из 2013 бусинок, покрашенных в красный или синий цвет. Назовём раскраску хорошей, если среди любого куска из 21 подряд идущей бусинки есть хотя бы одна красная. Докажите, что хороших раскрасок нечётное число. (Раскраски, отличающиеся поворотом, считаем разными.)