

## Линейные рекурренты порядка $k$

**Определение.** Пусть  $k \in \mathbb{N}$ ,  $c_0, c_1, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{R}$ ,  $c_0 \neq 0$ ,  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Последовательность  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  заданная начальными значениями  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  и соотношением

$$a_{n+k} + c_{k-1}a_{n+k-1} + \dots + c_1a_{n+1} + c_0a_n = f(n)$$

называется *линейной рекуррентой порядка  $k$* . Если  $f(n) = 0$ , то рекуррента называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной*.

**Определение.** Многочлен  $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1x + c_0$  называется *характеристическим многочленом* линейной рекурренты.

**Теорема.** Пусть характеристический многочлен однородной линейной рекурренты  $a_n$  имеет корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  с кратностями  $s_1, s_2, \dots, s_m$  соответственно, и  $s_1 + s_2 + \dots + s_m = k$ . Тогда общий член последовательности имеет вид

$$a_n = (A_{11} + n A_{12} + \dots + n^{s_1-1} A_{1s_1}) \lambda_1^n + \dots + (A_{m1} + n A_{m2} + \dots + n^{s_m-1} A_{ms_m}) \lambda_m^n$$

для некоторых фиксированных  $\{A_{ij}\}$ .

1. Дано неоднородное линейное рекуррентное соотношение. Обозначим за  $\{a_n^{(p)}\}$  его какое-то частное решение, а за  $\{a_n^{(h)}\}$  — общее решение соответствующего однородного рекуррентного соотношения. Докажите, что общее решение  $\{a_n\}$  неоднородного рекуррентного соотношения имеет вид  $a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)}$ .

2. Пусть характеристический многочлен имеет единственный корень  $\lambda$  кратности  $k$ .

(а) Докажите, что  $a_n = (A_1 + n A_2 + \dots + n^{k-1} A_{k-1}) \lambda^n$  удовлетворяет нужному рекуррентному соотношению.

*Подсказка.* Вспомните формулу для разностного многочлена порядка  $k$ .

(б) Докажите, что при фиксированных  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  общий член последовательности обязательно имеет вид  $a_n = (A_1 + n A_2 + \dots + n^{k-1} A_{k-1}) \lambda^n$  для некоторых  $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$ , определяющихся единственным образом.

**Определение.** Пусть  $F(x) = p_k x^k + \dots + p_1 x + p_0$  — некоторый многочлен. Результатом действия многочлена  $F$  на последовательность  $\{a_n\}$  назовём последовательность  $\{(Fa)_n\}$ , задаваемую формулой  $(Fa)_n = p_k a_{n+k} + \dots + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n$ .

3. (а) Докажите, что если последовательность  $\{a_n\}$  удовлетворяет однородному линейному рекуррентному соотношению с характеристическим многочленом  $P$ , то  $\{(Pa)_n\} = 0$ .

(б) Докажите, что

$$\begin{aligned} ((\alpha F)a)_n &= \alpha \cdot (Fa)_n, & ((F + G)a)_n &= (Fa)_n + (Ga)_n, \\ (F(a + b))_n &= (Fa)_n + (Fb)_n, & ((F \cdot G)a)_n &= (F(Ga))_n = (G(Fa))_n. \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha$  — константа;  $a, b$  — последовательности; а  $F, G$  — многочлены.

(в) Пусть  $F(x) = G(x)H(x)$ , где многочлены  $G$  и  $H$  взаимно просты. Докажите, что  $\{(Fa)_n\} = 0$  тогда и только тогда, когда  $a_n$  можно представить в виде  $a_n = b_n + c_n$ , где  $\{(Gb)_n\} = 0$  и  $\{(Hc)_n\} = 0$ .

(г) Докажите теорему.

(д) Докажите, что коэффициенты  $\{A_{ij}\}$  определяются единственным образом.

4. Найдите формулу общего члена для последовательностей, заданных условиями:

(а)  $a_0 = a_2 = 0, a_1 = 9, a_{n+3} = 3a_{n+1} + 2a_n,$

(б)  $a_0 = 1, a_1 = -1, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n - 2n + 5$

5. Даны различные вещественные ненулевые числа  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . Докажите, что если для любого натурального  $n \geq n_0$  и некоторых вещественных чисел  $c_1, c_2, \dots, c_m$  выполнено  $c_1 x_1^n + \dots + c_m x_m^n = 0$ , то все  $c_i$  равны 0.

6. Обозначим за  $a, b, c$  комплексные корни уравнения  $x^3 + x + 1 = 0$ . Найдите сумму  $a^9 + b^9 + c^9$ .

7. Последовательность  $\{a_n\}$  задана формулой  $a_n = a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}^2$  и начальными значениями  $a_0 = a_2 = 1, a_1 = 2$ . При каком наименьшем  $k$  произведение  $a_0 a_1 \dots a_k$  будет больше  $2^{2025}$ ?

8. Последовательность  $\{a_n\}$  задана формулой  $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{a_{n-1}}$  и начальными значениями  $a_1 = a_2 = 1$ . Найдите формулу общего члена последовательности.