Линейные рекурренты порядка k

Определение. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{R}$, $c_0 \neq 0$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ заданная начальными значениями $a_0, a_1, \ldots a_{k-1}$ и соотношением

$$a_{n+k} + c_{k-1}a_{n+k-1} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = f(n)$$

называется *линейной рекуррентой порядка k*. Если $f(n) = 0$, то рекуррента называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной*.

Определение. Многочлен $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \ldots + c_1 x^1 + c_0$ называется *характеристическим многочленом* линейной рекурренты.

Теорема. Пусть характеристический многочлен однородной линейной рекурренты a_n имеет корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ с кратностями $s_1, s_2, \ldots, s_m$ соответственно, и $s_1 + s_2 + \ldots + s_m = k$. Тогда общий член последовательности имеет вид

$$a_n = (A_{11} + n\, A_{12} + \cdots + n^{s_1-1}\, A_{1s_1})\lambda_1^n + \ldots + (A_{m1} + n\, A_{m2} + \ldots + n^{s_m-1}\, A_{ms_m})\lambda_m^n$$

для некоторых фиксированных $\{A_{ij}\}$.

1. Дано неоднородное линейное рекуррентное соотношение. Обозначим за $\{a_n^{(p)}\}$ его какое-то частное решение, а за $\{a_n^{(h)}\}$ — общее решение соответствующего однородного рекуррентного соотношения. Докажите, что общее решение $\{a_n\}$ неоднородного рекуррентного соотношения имеет вид $a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)}$.

2. Пусть характеристический многочлен имеет единственный корень λ кратности k.
(а) Докажите, что $a_n = (A_1 + n\, A_2 + \cdots + n^{k-1}\, A_{k-1})\lambda^n$ удовлетворяет нужному рекуррентному соотношению.
(б) Докажите, что при фиксированных $a_0, a_1, \ldots a_{k-1}$ общий член последовательности обязательно имеет вид $a_n = (A_1 + n\, A_2 + \cdots + n^{k-1}\, A_{k-1})\lambda^n$ для некоторых $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$, определяющихся единственным образом.

Определение. Пусть $F(x) = p_k x^k + \ldots + p_1 x + p_0$ — некоторый многочлен. Результатом **действия многочлена F на последовательность** $\{a_n\}$ назовём последовательность $\{(Fa)_n\}$, задаваемую формулой $(Fa)_n = p_k a_{n+k} + \ldots + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n$.

3. **(а)** Докажите, что если последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет однородному линейному рекуррентому соотношению с характеристическим многочленом P, то $\{(Pa)_n\} = 0$.
(б) Докажите, что

$$((\alpha F)a)_n = \alpha \cdot (Fa)_n, \quad ((F+G)a)_n = (Fa)_n + (Ga)_n,$$
$$(F(a+b))_n = (Fa)_n + (Fb)_n, \quad ((F \cdot G)a)_n = (F(Ga))_n = (G(Fa))_n.$$

Здесь α — константа; a, b — последовательности; а F, G — многочлены.
(в) Пусть $F(x) = G(x)H(x)$, где многочлены G и H взаимно просты. Докажите, что $\{(Fa)_n\} = 0$ тогда и только тогда, когда a_n можно представить в виде $a_n = b_n + c_n$, где $\{(Gb)_n\} = 0$ и $\{(Hc)_n\} = 0$.
(г) Докажите теорему.
(д) Докажите, что коэффициенты $\{A_{ij}\}$ определяются единственным образом.

4. Найдите формулу общего члена для последовательностей, заданных условиями:
(а) $a_0 = a_2 = 0,\ a_1 = 9,\ a_{n+3} = 3a_{n+1} + 2a_n,$
(б) $a_0 = 1,\ a_1 = -1,\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n - 2n + 5.$

5. Даны различные вещественные ненулевые числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Докажите, что если для любого натурального $n \geqslant n_0$ и некоторых вещественных чисел $c_1, c_2, \ldots c_m$ выполнено $c_1x_1^n + \ldots + c_mx_m^n = 0$, то все c_i равны 0.

6. Обозначим за a, b, c комплексные корни уравнения $x^3 + x + 1 = 0$. Найдите сумму $a^9 + b^9 + c^9$.

7. Последовательность $\{a_n\}$ задана формулой $a_n = a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}^2$ и начальными значениями $a_0 = a_2 = 1$, $a_1 = 2$. При каком наименьшем k произведение $a_0a_1 \ldots a_k$ будет больше 2^{2025}?

8. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ненулевых действительных чисел обладает свойством, что $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 - 1}{a_n}$ для всех натуральных n. Известно, что $a_1 = 1$ и $a_2 = k$, где $1 < k < 2$. Покажите, что существует некоторая константа A, зависящая от k, такая что $-A \leqslant b_n \leqslant A$ для всех натуральных n.

9. Последовательность $\{a_n\}$ задана формулой $a_{n+1} = \frac{3(5-7a_n)}{2(10a_n+17)}$ и начальным значением $a_0 = \frac{4}{3}$. Найдите формулу общего члена последовательности.