

## Фиксированные точки

**Полезная мысль.** Чтобы угадать фиксированную точку, полезно рассмотреть частные (и вырожденные) случаи.

1. На дуге  $AB$  окружности  $\omega$  выбрана произвольная точка  $X$ . Через середину  $Y$  отрезка  $BX$  проведена прямая  $\ell$ , перпендикулярная  $AX$ . Докажите, что все прямые  $\ell$  проходят фиксированную точку, не зависящую от выбора точки  $X$ .
2. На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечена точка  $D$ . Произвольный луч  $\ell$ , выходящий из вершины  $A$ , пересекает отрезок  $BC$  в точке  $X$ , а окружность  $(ABC)$  — в точке  $Y$ . Докажите, что окружность  $(DXY)$  проходит через фиксированную точку, отличную от  $D$ , и не зависящую от выбора луча  $\ell$ .
3. Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$  с попарно непараллельными сторонами. На стороне  $AD$  выбирается произвольная точка  $P$ , отличная от  $A$  и  $D$ . Описанные окружности треугольников  $ABP$  и  $CDP$  вторично пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что прямая  $PQ$  проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора точки  $P$ .
4. Из точки  $A$  к окружности  $\omega$  проведена касательная  $AD$  и произвольная секущая, пересекающая окружность в точках  $B$  и  $C$  ( $B$  лежит между точками  $A$  и  $C$ ). Докажите, что окружность, проходящая через точки  $C$  и  $D$  и касающаяся прямой  $BD$ , проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора секущей (и отличную от  $D$ ).
5. На плоскости даны точки  $A$  и  $B$ , а также прямая  $\ell$ , проходящая через точку  $B$ . Рассмотрим произвольную окружность  $\omega$ , касающуюся прямой  $\ell$  в точке  $V$  и не содержащую внутри себя точку  $A$ . Касательные к  $\omega$ , проведённые из точки  $A$ , касаются  $\omega$  в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что прямая  $XY$  проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора окружности  $\omega$ .
6. Дана окружность  $\Omega$ , касающаяся стороны  $AB$  угла  $BAC$  и лежащая вне этого угла. Рассматриваются окружности  $\omega$ , вписанные в угол  $BAC$ . Общая внутренняя касательная к  $\Omega$  и  $\omega$ , отличная от  $AB$ , касается  $\omega$  в точке  $K$ . Пусть  $L$  — точка касания  $\omega$  и  $AC$ . Докажите, что все такие прямые  $KL$  проходят через фиксированную точку, не зависящую от выбора окружности  $\omega$ .
7. Дан фиксированный треугольник  $ABC$  и положительное число  $\lambda$ . На окружности  $(ABC)$  выбирается переменная точка  $X$ . Точка  $D$  на отрезке  $CX$  такова, что  $CD : DX = \lambda$ . Окружности  $(AXD)$  и  $(BCD)$  повторно пересекаются в точке  $E$ . Докажите, что точки  $E$  лежат на фиксированной окружности.
8. В треугольнике  $ABC$  на стороне  $AC$  выбрана точка  $X$ . Окружность проходит через точку  $X$ , касается стороны  $AC$  и пересекает описанную окружность треугольника  $ABC$  в таких точках  $M$  и  $N$ , что прямая  $MN$  делит отрезок  $BX$  пополам и пересекает отрезки  $AB$  и  $BC$  в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что описанная окружность треугольника  $PBQ$  проходит через фиксированную точку, не зависящую от положения точки  $X$ .