Линейные рекурренты второго порядка

Определение. Последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ заданная начальными значениями a_0, a_1 и соотношением

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0, \quad q \neq 0$$

называется *однородной линейной рекуррентой второго порядка.*

Определение. Многочлен $P(x) = x^2 + px + q$ называется *характеристическим многочленом* линейной рекурренты второго порядка.

1. Пусть характеристический многочлен имеет два различных вещественных корня λ_1, λ_2.
(а) Проверьте, что для любых чисел A_1, A_2 последовательность $a_n = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n$ удовлетворяет нужному рекуррентному соотношению.
(б) Докажите, что при фиксированных a_0, a_1 общий член последовательности обязательно имеет вид $a_n = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n$ для некоторых $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$, определяющихся единственным образом.
(в) Как будет выглядеть формула общего члена последовательности, если числа λ_1, λ_2 не вещественные?

2. Пусть теперь характеристический многочлен имеет кратный вещественный корень λ.
(а) Проверьте, что для любых чисел A_1, A_2 последовательность $a_n = (A_1n + A_2)\lambda^n$ удовлетворяет нужному рекуррентному соотношению.
(б) Докажите, что при фиксированных a_0, a_1 общий член последовательности обязательно имеет вид $a_n = (A_1n + A_2)\lambda^n$ для некоторых $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$, определяющихся единственным образом.

3. Найдите формулу общего члена для последовательностей, заданных условиями:
(а) $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$;
(б) $a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$.

4. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 - 6x + 1 = 0$. Докажите, что при любом натуральном n число $x_1^n + x_2^n$ является целым и не делится на 5.

5. Последовательность $\{a_n\}$ положительных вещественных чисел такова, что $a_0 = 1$ и $a_n = a_{n+1} + a_{n+2}$. Найдите формулу общего члена последовательности.

6. Найдите формулу общего члена последовательности $\{a_n\}$, заданной соотношениями $a_{n+1} - 2a_n = 1$, $a_1 = 1$.

7. Для произвольного натурального n найдите степень вхождения двойки в число $\left[\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1}\right]$.

8. Докажите, что число $19 \cdot 8^n + 17$ является составным при всех целых $n \geqslant 0$.