Точки Брокара

В треугольнике ABC существуют такие точки P и Q, что

$$\angle CAP = \angle ABP = \angle BCP = \angle BAQ = \angle CBQ = \angle ACQ = \varphi.$$

Эти точки называются *точками Брокара.*

1. На сторонах треугольника ABC вовне построены треугольники с вершинами A_1, B_1 и C_1 так, что треугольники ABC, CA_1B, CAB_1, C_1AB подобны (с таким порядком вершин).
(а) Докажите, что окружности, описанные около трех построенных треугольников, пересекаются в точке P.
(б) Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке P.

2. Пусть прямые AP, BP, CP пересекают окружность (ABC) в точках A_1, B_1, C_1.
(а) Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны (с некоторым порядком вершин).
(б) Докажите, что $OP = OQ$ и $\angle POQ = 2\varphi$, где O — центр (ABC).

3. Точка P лежит на одной из медиан треугольника ABC. Докажите, что точка Q тоже лежит на одной из медиан треугольника ABC.

4. Докажите, что $\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma$, где α, β, γ — углы треугольника ABC.

5. **(а)** *Окружность Брокара.* Прямые CP и BQ, AP и CQ, BP и AQ пересекаются в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что точки P, Q, A_1, B_1, C_1 лежат на одной окружности.
(б) Докажите, что центр O окружности (ABC) и точка Лемуана L треугольника ABC лежат на этой окружности, причём OL — её диаметр.
(в) Докажите, что на этой же окружности лежат три точки Болтая треугольника ABC (для каждой из вершин).

6. Симедиана из вершины A пересекает сторону BC в точке A_1. Докажите, что BC — внешняя биссектриса угла PA_1Q.

7. Докажите, что прямая AP, медиана из вершины B и симедиана из вершины C пересекаются в одной точке.

8. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Выберем внутри него точки P и Q такие, что

$$\angle PAB = \angle PBC = \angle PCD = \varphi, \quad \angle QDC = \angle QCB = \angle QBA = \psi.$$

(а) Выразите $\operatorname{ctg}\varphi$ через стороны и углы четырёхугольника $ABCD$.
(б) Докажите, что $\varphi = \psi$ тогда и только тогда, когда $ABCD$ вписанный.
(в) Докажите, что если четырёхугольник $ABCD$ вписанный и $\angle PDA = \varphi$, то $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ (то есть четырёхугольник $ABCD$ гармонический).
(г) Докажите, что в гармоническом четырёхугольнике $OP = OQ$, где O — центр описанной окружности четырёхугольника.
(д) Докажите, что в гармоническом четырёхугольнике точки P и Q лежат на окружности с диаметром OL, где L — точка пересечения диагоналей.