

Разрезание на параллелограммы

1. Докажите, что равносторонний треугольник нельзя разрезать на параллелограммы.
2. (а) Докажите, что если выпуклый многоугольник можно разбить на несколько параллелограммов, то он имеет центр симметрии.
(б) Верно ли обратное утверждение, то есть что любой выпуклый центрально-симметричный многоугольник можно разрезать на параллелограммы?
(в) Выпуклый многоугольник можно разрезать на центрально-симметричные многоугольники. Докажите, что у него есть центр симметрии.
3. Какое наименьшее число сторон может иметь нечётноугольник, который можно разрезать на параллелограммы?
4. Выпуклый многоугольник разбит на параллелограммы. Вершину многоугольника, принадлежащую только одному параллелограмму, назовем *хорошей*. Докажите, что хороших вершин не менее трёх.
5. Правильный 100-угольник разрезали на несколько параллелограммов и два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны.
6. (а) Центрально-симметричный многоугольник разбит на параллелограммы, причём если два параллелограмма разбиения соприкасаются, то они делают это либо по вершине, либо по целой стороне. Выберем две непараллельных стороны многоугольника и для каждой из них рассмотрим цепочку параллелограммов, соединяющих эту сторону с параллельной ей (в цепочке для стороны AB многоугольника у первого параллелограмма сторона примыкает к AB , у последнего — к параллельной ей; у всех промежуточных параллелограммов ровно два соседних параллелограмма, причём они соприкасаются по стороне, параллельной AB). Докажите, эти цепочки пересекаются ровно по одному параллелограмму.
(б) Из плиток в виде ромбиков со стороной 1 и острым углом 60° сложили выпуклый шестиугольник. Известно, что количество плиток одной из ориентаций равно среднему арифметическому количеству плиток двух других ориентаций. Докажите, что длина одной из сторон шестиугольника равна среднему гармоническому длин двух других его сторон.
7. Докажите, что площадь правильного 360-угольника со стороной 1 равна

$$(\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 179^\circ) \cdot 90.$$