

Разрезание на параллелограммы

1. Докажите, что равносторонний треугольник нельзя разрезать на параллелограммы.
2. (а) Докажите, что если выпуклый многоугольник можно разбить на несколько параллелограммов, то он имеет центр симметрии.
(б) Верно ли обратное утверждение, то есть что любой выпуклый центрально-симметричный многоугольник можно разрезать на параллелограммы?
(в) Выпуклый многоугольник можно разрезать на выпуклые центрально-симметричные многоугольники. Докажите, что у него есть центр симметрии.
3. Какое наименьшее число сторон может иметь нечётноугольник, который можно разрезать на параллелограммы?
4. Выпуклый многоугольник разбит на параллелограммы. Вершину многоугольника, принадлежащую только одному параллелограмму, назовем *хорошей*. Докажите, что хороших вершин не менее трёх.
5. Правильный 100-угольник разрезали на несколько параллелограммов и два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны.
6. Из плиток в виде ромбиков со стороной 1 и острым углом 60° сложили выпуклый шестиугольник. Известно, что количество плиток одной из ориентаций равно среднему арифметическому количеству плиток двух других ориентаций. Докажите, что длина одной из сторон шестиугольника равна среднему гармоническому длин двух других его сторон.
7. Докажите, что площадь правильного 360-угольника со стороной 1 равна
$$(\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 179^\circ) \cdot 90.$$
8. Каждая грань выпуклого многогранника — центрально-симметричный многоугольник. Докажите, что многогранник имеет центр симметрии.