Тренировочная олимпиада, решения

1. Кот Базилио в течение n ночей подряд выкапывал в поле чудес золотые монеты. По словам кота, он каждую ночь (за исключением самой первой) выкапывал либо вдвое больше, либо вдвое меньше монет, чем в предыдущую ночь. Также Базилио заявил, что в одну из ночей выкопал ровно столько монет, сколько за все остальные ночи вместе взятые. При каких натуральных n его слова могут оказаться правдой, если известно, что хотя бы одну монету он действительно выкопал?

Ответ: только для $n = 3$.

Решение. Понятно, что при $n = 1$ и $n = 2$ такое невозможно. При $n = 3$ подойдёт такой пример: 1 выкопанная монета в первую ночь, 2 монеты — во вторую, 1 монета — в третью. Тогда условие задачи будет выполнено и кот за вторую ночь выкопает столько же монет, сколько в сумме за первую и третью.

Докажем, что для остальных n такое невозможно. Для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ обозначим через a_i количество монет, выкопанных в i-ую ночь. Все числа a_i положительны, так как в противном случае кот бы выкопал суммарно 0 монет. Пусть m — номер ночи, в которую Базилио выкопал половину всех монет. Тогда

$$a_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1} + a_{m+1} + \ldots + a_n.$$

Если $m \neq 1$ и $m \neq n$, то при $n \geqslant 4$

$$a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1} + a_{m+1} + \ldots + a_n > a_{m-1} + a_{m+1} \geqslant \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}a_n = a_n,$$

противоречие.

Значит, $m = 1$ или $m = n$. Эти случаи аналогичны, разберём $m = 1$.

Если последовательность a_i монотонно убывает, то

$$a_1 = a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_1 + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}a_1 = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) a_1 < a_1,$$

противоречие.

Иначе выберем наименьший индекс k, для которого $a_k < a_{k+1}$. Тогда

$$a_1 = a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} = \frac{1}{2}a_1 + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}}a_1 + \frac{2}{2^{k-1}}a_1 = \left(1 + \frac{1}{2^{k-1}}\right) a_1 > a_1,$$

противоречие.

2. На плоскости отмечены k различных точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Каждая отмеченная точка покрашена в один из двух цветов: красный или синий. Треугольник с вершинами в отмеченных точках называется *одноцветным*, если все его вершины покрашены в один и тот же цвет. При каком наименьшем натуральном k гарантированно удастся выделить два непересекающихся одноцветных треугольника? (Треугольник полностью содержит свою границу и внутренность.)

Ответ: $k = 9$.

Решение. Для $k = 8$ легко привести пример: расположим внутри треугольника с тремя красными вершинами пять синих точек (так, чтобы никакие три точки не легли на одну прямую). В этом примере любые два синих треугольника имеют общую вершину и любой синий треугольник лежит внутри красного. Для $k < 8$ можно взять любые k из этих восьми точек.

Докажем, что из любых девяти точек можно выделить два непересекающихся одноцветных треугольника.

Предположим, что есть шесть точек одного цвета. Выберем такую систему координат, в которой x-координаты этих шести точек различны, и упорядочим их по x-координате: $A_1, \ldots, A_6$. Рассмотрим треугольники $A_1A_2A_3$ и $A_4A_5A_6$. Эти треугольники не пересекаются, поскольку их проекции на ось x не пересекаются.

Осталось показать, как можно выделить два искомых треугольника в случае, когда есть четыре точки одного цвета (скажем, красного) и пять точек другого (синего). Рассмотрим выпуклую оболочку красных точек: это либо выпуклый четырёхугольник $ABCD$, либо треугольник ABC (а четвёртая точка D лежит внутри). В обоих случаях прямая BD разделяет точки A и C. По принципу Дирихле в одной из полуплоскостей относительно прямой BD (скажем, в той, где лежит точка A) будет хотя бы три синие точки. Выделим любой треугольник с вершинами в этих хотя бы трёх синих точках и треугольник BDC. Оба треугольника по построению одноцветные и не пересекаются, так как отделены друг от друга прямой BD.

3. Про различные натуральные числа m и n, большие $1\,000\,000$, известно, что $(m+n)^3$ делится на mn. Докажите, что $|m-n| > 10\,000$.

Решение. Введём обозначения: $d = \text{НОД}(m, n)$, $a = m/d$, $b = n/d$. Заметим, что $\text{НОД}(a, b) = 1$.

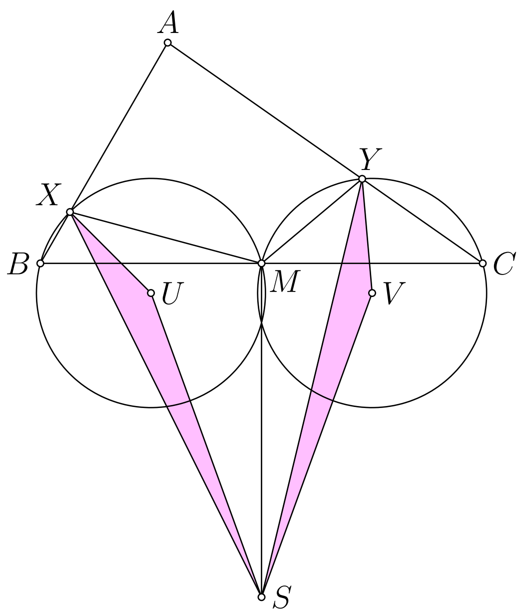
По условию $(m+n)^3 = d^3 \cdot (a+b)^3$ делится в $mn = d^2ab$, что равносильно делимости $d(a+b)^3$ на ab. Раз НОД$(a, b) = 1$, то и НОД$(a+b, a) =$ НОД$(a+b, b) = 1$. Следовательно, d делится на ab, и можно записать неравенство $d \geqslant ab$, которые равносильно неравенству $d^3 \geqslant d^2ab = mn$.

Завершим решение цепочкой неравенств:

$$|m-n| = d \cdot |a-b| \geqslant d \geqslant \sqrt[3]{mn} > \sqrt[3]{10^6 \cdot 10^6} = 10^4.$$

4. В остроугольном треугольнике ABC ($AB < AC$) отмечена середина M стороны BC. На сторонах AB, AC выбраны точки X и Y соответственно так, что $\angle AXM = \angle AYM$; при этом $BX < AX$ и $CY < AY$. Серединные перпендикуляры к отрезкам BC и XY пересекаются в точке S. Докажите: что $\angle YAX + \angle XSY = \angle XMY$.

Решение 1. Рассмотрим окружности (BMX) и (CMY), обозначим их центры через U и V соответственно. Эти окружности равны, так как в них на равные хорды BM и CM опираются равные углы $\angle BXM$ и $\angle CYM$. Более того, эти окружности симметричны относительно серпера к отрезку BC. На котором, кстати, лежит точка S. Из симметрии относительно этого серпера заключаем, что $SU = SV$.



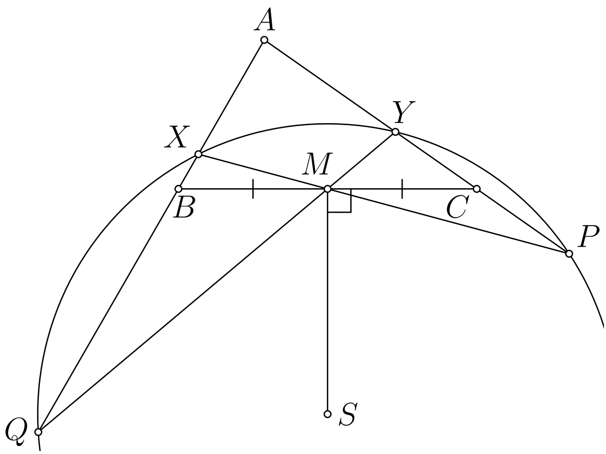
Заметим, что треугольники SUX и SVY равны по трём сторонам. Следовательно, эти треугольники совмещаются друг с другом поворотом или симметрией. Поскольку $AB \neq AC$, точки X и Y не симметричны относительно серпера к отрезку BC. Стало быть, треугольники совмещаются поворотом и $\angle XSY = \angle(UX, VY)$.

Осталось посчитать уголки. Вооружимся следующим фактом: если в треугольнике ABC провести касательную ℓ_A в вершине A, то тогда $\angle(\ell_A, BC) = \angle ABC - \angle BCA$.

Проведём касательные ℓ_X и ℓ_Y в точках X и Y к окружностям (BMX) и (CMY) соответственно. Тогда

$$\angle XMY - \angle YAX = (180^\circ - \angle BMX - \angle YMC) - (180^\circ - \angle XBM - \angle MCY) = \\ = (\angle XBM - \angle BMX) + (\angle MCY - \angle YMC) = \angle(\ell_X, BC) + \angle(BC, \ell_Y) = \\ = \angle(\ell_X, \ell_Y) = \angle(UX, UY) = \angle XSY.$$

Решение 2. Достроим точки P и Q пересечения лучей XM и YM с прямыми AC и AB соответственно. В силу неравенств $AX > BX$ и $AY > CY$ они существуют и будут лежать с точкой A в разных полуплоскостях относительно прямой BC. Заметим, что раз $\angle MXB = \angle MYC$, то точки X, Y, P, Q лежат на одной окружности. Рассмотрим точку S' — центр этой окружности, и докажем, что точка S' совпадает с точкой S.



Точка S' является центром окружности $(XYPQ)$ и само собой лежит на серпере к своей хорде XY. А ещё можно заметить, что $S'M \perp BC$ по обратной теореме о бабочке (для бабочки $X - P - Y - Q$ и секущей BC). То есть точка S' лежит на серпере к отрезку BC. Следовательно, $S = S'$. (Серперы не совпадают, так как $AB \neq AC$.)

Осталось посчитать уголки. Используя сумму углов невыпуклого четырёхугольника $APMQ$, находим

$$\angle XMY - \angle YAX = \angle XQY + \angle XPY = 2\angle XPY = \angle XSY.$$

5. На свадьбе собрались 90 гостей, каждый из которых знаком с не менее чем 30 другими гостями. Докажите, что всех гостей можно рассадить за 3 стола по 30 человек так, чтобы каждый гость был знаком хотя бы с одним другим гостем, сидящим за его столом.

Решение 1. Докажем лемму: если в графе $3n$ вершин и все вершины имеют степень не меньше n, то тогда множество вершин графа можно разбить на непересекающиеся цепи из двух или трёх вершин.

Рассмотрим набор из непересекающихся цепей из двух или трёх вершин, покрывающий наибольшее число вершин. Докажем, что этот набор покрывает все вершины графа.

От противного: пусть есть непокрытые вершины $F_1, F_2, \ldots$ Обозначим двухвершинные и трёхвершинные цепи из набора через $A_i - B_i$ и $C_j - D_j - E_j$ соответственно.

Утверждается, что вершина F_1 не может быть соединена ни с какими вершинами графа, кроме вершин D_j. Действительно:
• если F_1 соединена с F_k, то можно добавить цепь $F_1 - F_k$ в набор;
• если F_1 соединена с A_i (или с B_i), то можно удлинить $A_i - B_i$ до $F_1 - A_i - B_i$;
• если F_1 соединена с C_j (или с E_j), то можно заменить цепь $C_j - D_j - E_j$ на две цепи $F_1 - C_j$ и $D_j - E_j$;
во всех этих случая получится набор цепей, покрывающий большее множество вершин. Противоречие.

Раз вершина F_1 может быть соединена только с вершинами D_j, то её степень не превосходит числа трёхвершинных цепей в наборе — не больше $n - 1$. Но по условию леммы степени всех вершин графа не меньше n. Противоречие, лемма доказана.

Завершим решение задачи. Разобьём все вершины графа знакомств на цепи как в лемме; пусть получилось a двухвершинных и b трёхвершинных цепей. Тогда $2a + 3b = 90$, откуда a делится на 3 и b делится на 2. Эти делимости позволяют нам объединить двухэлементные цепи в шестёрки вершин, и трёхэлементные цепи в шестёрки вершин, причём в каждой шестёрке нет изолированных вершин. Осталось объединить эти шестёрки в группы по 30 и получить искомое разбиение.

Решение 2. Пронумеруем все места за всеми столами числами от 1 до 90. Рассмотрим всевозможные способы рассадить 90 гостей на эти места; всего 90! способов.

Будем говорить, что гость *портит* рассадку, если в этой рассадке все его знакомые оказались за двумя другими столами. Оценим число рассадок, которые портит конкретный гость.

Есть у гостя ровно $k \geqslant 30$ друзей и он уже сидит на конкретном месте, то тогда все испорченные им рассадки генерируются так: нужно сначала досадить к нему за стол 29 незнакомых ему людей, после чего рассадить остальных как попало. Число способов это сделать равно

$$(89-k)\cdot(88-k)\ldots\cdot(61-k)\cdot 60!\ ,$$

что можно оценить сверху значением $\frac{59!}{30!}\cdot 60!$

Получается, что каждый гость портит не более $90\cdot\frac{59!}{30!}\cdot 60!$ рассадок (множитель 90 появился за счёт выбора места для этого гостя). Тогда суммарное по всем гостям число испорченных рассадок не превосходит $90^2\cdot\frac{59!}{30!}\cdot 60!$

Существование не испорченной никем рассадки следует из числового неравенства:

$$90^2\cdot\frac{59!}{30!}\cdot 60! < 90!$$

Проверим его:

$$90^2\cdot 59!\cdot 60! < 90!\cdot 30!$$

$$90\cdot 59\cdot 58\ldots\cdot 31 < 89\cdot 88\cdot\ldots\cdot 61$$

$$\frac{89\cdot 88\cdot\ldots\cdot 61}{59\cdot 58\ldots\cdot 31} > \left(\frac{89}{59}\right)^{29} > \left(\frac{3}{2}\right)^{29} > 2^{14.5} > 90.$$