# Тренировочная олимпиада, 5 задач

**1.** Кот Базилио в течение $n$ ночей подряд выкапывал в поле чудес золотые монеты. По словам кота, он каждую ночь (за исключением самой первой) выкапывал либо вдвое больше, либо вдвое меньше монет, чем в предыдущую ночь. Также Базилио заявил, что в одну из ночей выкопал ровно столько монет, сколько за все остальные ночи вместе взятые. При каких натуральных $n$ его слова могут оказаться правдой, если известно, что хотя бы одну монету он действительно выкопал?

**2.** На плоскости отмечены $k$ различных точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Каждая отмеченная точка покрашена в один из двух цветов: красный или синий. Треугольник с вершинами в отмеченных точках называется *одноцветным*, если все его вершины покрашены в один и тот же цвет. При каком наименьшем натуральном $k$ гарантированно удастся выделить два непересекающихся одноцветных треугольника? (Треугольник полностью содержит свою границу и внутренность.)

**3.** Про различные натуральные числа $m$ и $n$, большие $1\,000\,000$, известно, что $(m+n)^3$ делится на $mn$. Докажите, что $|m-n| > 10\,000$.

**4.** В остроугольном треугольнике $ABC$ ($AB < AC$) отмечена середина $M$ стороны $BC$. На сторонах $AB$, $AC$ выбраны точки $X$ и $Y$ соответственно так, что $\angle AXM = \angle AYM$; при этом $BX < AX$ и $CY < AY$. Серединные перпендикуляры к отрезкам $BC$ и $XY$ пересекаются в точке $S$. Докажите: что $\angle YAX + \angle XSY = \angle XMY$.

**5.** На свадьбе собрались 90 гостей, каждый из которых знаком с не менее чем 30 другими гостями. Докажите, что всех гостей можно рассадить за 3 стола по 30 человек так, чтобы каждый гость был знаком хотя бы с одним другим гостей, сидящим за его столом.