Алгебраический разнобой

1. Квадратные трехчлены f, g и h таковы, что при каждом вещественном x числа $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ являются длинами сторон некоторого треугольника, а числа $f(x)-1$, $g(x)-1$ и $h(x)-1$ не являются длинами сторон треугольника. Докажите, что хотя бы из многочленов $f+g-h$, $g+h-f$, $h+f-g$ постоянен.

2. Существует ли бесконечная возрастающая последовательность $\{a_n\}$ натуральных чисел такая, что для любого целого m среди элементов последовательности $\{m+a_n\}$ лишь конечное число простых чисел?

3. Натуральные числа x и y удовлетворяют соотношению $2x^2+x=3y^2-y$. Докажите, что $x+y$ — точный квадрат натурального числа.

4. Натуральные числа от 1 до n расставлены по кругу. Для каждой пары соседних чисел выписано их произведение. Определите наибольшее возможное значение, которое может принимать сумма всех выписанных произведений. (*Ну или хотя бы предъявите расстановку, в которой достигается максимум суммы произведений.*)

5. Докажите, что для любого многочлена x^2+ax+b с целыми коэффициентами существует такой многочлен $2x^2+cx+d$ с целыми коэффициентами, что множества их значений в целых точках не пересекаются.

6. Вещественные числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=2. \end{cases}$$

Докажите, что среди этих чисел найдутся два, разность которых не меньше 1.

7. Докажите, что для любой последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ положительных чисел найдётся такой номер n, что $\dfrac{1+a_{n+1}}{a_n} > 1+\dfrac{1}{n}$.

8. Дана дробно-рациональная функция $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x), Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами. Может ли множеством её значений оказаться луч $[\sqrt{2}, +\infty)$?