Алгебраический разнобой

1. Существует ли бесконечная возрастающая последовательность $\{a_n\}$ натуральных чисел такая, что для любого целого m среди элементов последовательности $\{m + a_n\}$ лишь конечное число простых чисел?

2. Натуральные числа x и y удовлетворяют соотношению $2x^2 + x = 3y^2 - y$. Докажите, что $x + y$ — точный квадрат натурального числа.

3. Натуральные числа от 1 до n расставлены по кругу. Для каждой пары соседних чисел выписано их произведение. Определите наибольшее возможное значение, которое может принимать сумма всех выписанных произведений. (*Ну или хотя бы предъявите расстановку, в которой достигается максимум суммы произведений.*)

4. Докажите, что для любого многочлена $x^2 + ax + b$ с целыми коэффициентами существует такой многочлен $2x^2 + cx + d$ с целыми коэффициентами, что множества их значений в целых точках не пересекаются.

5. Вещественные числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2. \end{cases}$$

Докажите, что среди этих чисел найдутся два, разность которых не меньше 1.

6. Докажите, что для любой последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ положительных чисел найдётся такой номер n, что $\dfrac{1 + a_{n+1}}{a_n} > 1 + \dfrac{1}{n}$.

7. Петя написал на доску натуральное число и приписывает к нему справа по одной ненулевой цифре. Докажите, что рано или поздно у числа на доске появится простой делитель, больший $1\,000\,000$.

8. Дана дробно-рациональная функция $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x), Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами. Может ли множеством её значений оказаться луч $[\sqrt{2}, +\infty)$?