Геометрические неравенства 2

1. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Докажите, что расстояние между центрами окружностей (AEB) и (CED) не меньше чем $\frac{AC+BD}{4}$.

2. Четырёхугольник вписан в окружность с центром в точке O. Его диагонали пересекаются в точке M, а средние линии (отрезки, соединяющих середины противоположных сторон) — в точке N. Докажите, что $OM \geqslant ON$.

3. Вписанная и вневписанная окружности неравнобедренного треугольника ABC касаются стороны BC в точках P и Q соответственно. Прямые AP и AQ вторично пересекают окружность (ABC) в точках P_1 и Q_1 соответственно. Докажите, что $PP_1 > QQ_1$.

4. В треугольнике ABC медианы пересекаются в точке M. Докажите, что если $\angle BMC < 90^\circ$, то $AB + AC > 3BC$.

5. Диагонали описанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E.

(а) Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC. Докажите, что угол AED тупой.

(б) Пусть $AB = CD \neq BC$. Докажите, что угол AED тупой.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке P. Биссектриса угла APB пересекает отрезки AB и CD в точках X и Y. Точки M и N — середины отрезков AB и CD. Докажите, что $XY \leqslant MN$.

7. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O. Центры вписанных окружностей треугольников ABC, BCD, CDA, DAB являются вершинами выпуклого четырёхугольника, периметр которого равен P. Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей треугольников AOB, BOC, COD, DOA не превосходит $P/2$.

8. Высоты BD и CE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H, высоты треугольника ADE пересекаются в точке F, точка M — середина стороны BC. Докажите, что $BH+CH \geqslant 2FM$.