Тренировочная олимпиада, решения

1. Найдите все тройки различных ненулевых чисел a, b и c, образующих арифметическую прогрессию (в каком-то порядке), и таких, что из чисел $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}$ также образуют арифметическую прогрессию (в каком-то порядке).

Ответ: $\{-2x, x, 4x\}$, где $x \neq 0$.

Решение. Без ограничения общности можно считать, что $a < b < c$. По условию $2b = a + c$ и выполняется одно из равенств:

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}, \quad \frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad \text{или} \quad \frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

В первом случае, домножив на $2abc$ и подставив $2b = a + c$, получим

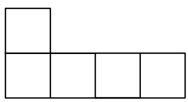
$$4ac = (a + c)c + a(a + c) \Leftrightarrow (a - c)^2 = 0 \Leftrightarrow a = c,$$

противоречие. Во втором случае, сделав то же самое, получим

$$2(a + c)c = 2ac + a(a + c) \Leftrightarrow a^2 + ac - 2c^2 = 0 \Leftrightarrow (a - c)(a + 2c) = 0.$$

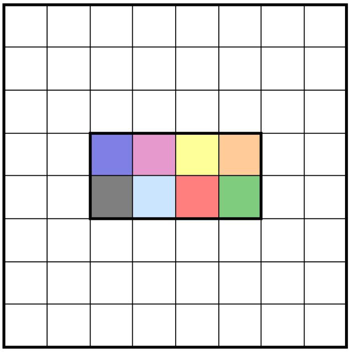
Так как $a \neq c$, то $a = -2c$, откуда $c = -2b$. Третий случай аналогичен второму (получается заменой a и c). Таким образом, подходят все тройки чисел $b = x$, $a = -2x$, $c = 4x$, где $x \neq 0$.

2. Алёна хочет покрасить клетки доски 8×8 в несколько цветов так, чтобы для любого положения Г-образной фигурки, изображённой на рисунке, пять покрытых ею клеток имели разные цвета (фигурку можно поворачивать и переворачивать). Какого наименьшего количества цветов хватит Алёне?



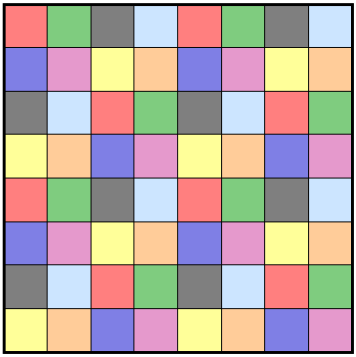
Ответ: 8 цветов.

Решение. Будем называть фигурку из условия *уголком.* Рассмотрим восемь клеток доски, образующие прямоугольник 2×4 и расположенные по центру как на рисунке:



Легко проверить, что для любой пары клеток из восьми выбранных найдётся уголок, содержащий эти две клетки (этот уголок может вылезать за границы нашего прямоугольника 2×4). Это означает, что меньше восьми цветов Алёне не хватит.

Пример для восьми цветов приведён на картинке ниже.



В этом примере

- если две клетки одного цвета находятся в одной строке или в одном столбце, то между ними стоит три другие клетки;
- если две клетки одного цвета находятся в разных строках и в разных столбцах, то они находятся в несоседних строках и несоседних столбцах.

В обоих случаях такие клетки не могут попасть в один уголок.

3. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Точки X и Y — середины сторон AB и CD. Докажите, что перпендикуляры из P на BC, из X на AC и из Y на BD пересекаются в одной точке.

Решение. Отметим точки K, L, M — основания перпендикуляров из X, Y, P

на AC, BD, BC соответственно. Пусть XK и MP пересекаются в точке Z. Покажем, что LY тоже проходит через Z.

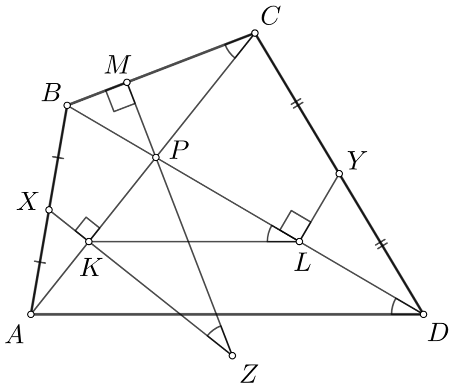
Заметим, что треугольники ABP и PCD подобны, а XK и YL — соответственные отрезки в этих треугольниках. Из этого следует, что

$$\frac{AK}{KP} = \frac{DL}{LP}.$$

По теореме Фалеса получаем, что $KL \parallel AD$. Заметим, что

$$\angle KLP = \angle ADB = \angle ACB = \angle KZP.$$

Первое равенство верно из-за доказанной параллельности, второе — из-за вписанности четырёхугольника $ABCD$, а третье — из-за вписанности четырёхугольника $CMKZ$ (углы, опирающиеся на CZ, прямые).



Из равенства $\angle KLP = \angle KZP$ следует вписанность четырёхугольника $KPLZ$, а из этой вписанности следует, что $\angle ZLP = 90^\circ$. Получаем, что

$$\angle ZLP + \angle PLY = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

то есть точки Z, L, Y лежат на одной прямой, что и требовалось.

4. В ряд расположено $n > 1$ лампочек. Изначально самая левая лампочка включена, остальные выключены. Каждую секунду состояние всех лампочек меняется по следующему правилу: если лампочка L и соседние с ней (у крайних лампочек одна соседняя, у некрайних — две) находятся в одном состоянии, то L выключается (или продолжает быть выключенной), иначе — включается (или продолжает быть включенной). Докажите, что существует бесконечно много значений n, при которых через какое-то время все лампочки выключатся, и бесконечно много значений n, при которых такого никогда не произойдёт.

Решение. Докажем, что при $n = 2^k$ все лампочки выключатся, причём этой происходит после 2^k переключений. Пусть A_k — таблица размера

$2^k \times 2^k$, заполненная нулями и единицами, и пусть i-я строка этой таблицы соответствует состоянию лампочек на i-й секунде (единицы соответствуют включенным лампочкам, а нули — выключенным). По условию верхняя строка таблицы — это $[1, 0, 0, \ldots, 0]$.

Докажем индукцией по k, что нижняя строка таблицы равна $[1, 1, 1, \ldots, 1]$. Из этого будет следовать утверждение индукции, потому что через секунду все лампочки будут выключены. База при $k = 1$ очевидна. Предположим, что утверждение верно для некоторого $k \geqslant 1$. Разобьём таблицу A_{k+1} на четыре таблицы размера $2^k \times 2^k$:

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & O_k \\ B_k & C_k \end{pmatrix}$$

При $m \leqslant 2^k$ последняя единица в m-й строке находится на позиции m, следовательно, таблица O_k состоит из нулей. Согласно индукционному предположению, нижняя строка таблицы A_k равна $[1, \ldots, 1]$. Тогда следующая строка (то есть строка номер $2^k + 1$) таблицы A_{k+1} равна

$$[\underbrace{0, \ldots, 0}_{2^k-1}, 1, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{2^k-1}].$$

Эта строка симметрична относительно своей середины, и эта симметрия сохраняется во всех последующих строках, потому что процедура из условии задачи симметрична. То есть таблица B_k является зеркальным отражением таблицы C_k. В частности, самый правый столбец таблицы B_k совпадает с самым левым столбцом таблицы C_k.

Рассмотрим таблицу C_k отдельно от остальной части A_{k+1}. Заметим, что строки в ней изменяются по тому же правилу, что и в изначальной задаче, так как первый (крайний левый) элемент строки зависит только от того, равны первые элементы предыдущей строки или нет. Поэтому, так как у A_k и C_k совпадают первые строки, то $C_k = A_k$. Таким образом, нижняя строка таблицы C_k равна $[1, 1, \ldots, 1]$, а значит и нижняя строка таблицы B_k равна $[1, 1, \ldots, 1]$, и переход индукции доказан.

Докажем, что при $n = 2^k + 1$ все лампочки выключатся. Изменение состояний лампочек можно описать таблицей $\mathcal{A}$ шириной $2^k + 1$ с бесконечным количеством строк. Первые 2^k строк образуют таблицу A_k, рассмотренную выше, с дополнительным столбцом нулей справа.

Тогда $(2^k + 1)$-ая строка этой таблицы $\mathcal{A}$ равна $[0, 0, \ldots, 0, 1, 1]$. Но она совпадает со вторая строкой таблицы $\mathcal{A}$, записанной в обратном порядке, поэтому последующие строки будут зеркальными копиями предыдущих, начиная со второй. Следовательно, все строки в таблице будут совпадать с одной из строк со второй по 2^k-ую строки или с их зеркальными копиями, а среди них по доказанному ранее строки из одних нулей нет.

5. Для каких натуральных n верно следующее утверждение: для произвольного многочлена P степени n с целыми коэффициентами найдутся такие различные натуральные a и b, для которых $P(a) + P(b)$ делится на $a + b$?

Ответ: При всех чётных n.

Решение. Нечётные n не подходят. В самом деле, рассмотрим многочлен $P(x) = x^n + 1$ и различные натуральные a, b. Так как n нечётно, $a^n + b^n$ делится на $a + b$, а тогда $P(a) + P(b) = (a^n + b^n) + 2$ не делится, поскольку $a + b > 2$.

Осталось доказать, что все чётные n подходят. Рассмотрим произвольный многочлен $P(x)$ степени n. Представим его в виде суммы $P(x) = P_0(x) + P_1(x)$, где в $P_0(x)$ все мономы чётной степени, а в $P_1(x)$ — нечётной. Заметим, что при всех натуральных a, b сумма $P_1(a) + P_1(b)$ делится на $a + b$. Докажем, что найдутся такие a, b, что и $P_0(a) + P_0(b)$ делится на $a + b$. Заметим, что степень P_0 равна n.

Рассмотрим случай, когда старший коэффициент $P_0(x)$ положителен (в случае отрицательного старшего коэффициента проведём дальнейшее доказательство для многочлена $-P_0(x)$). Так как $n > 1$, то найдётся такое натуральное m, что $P_0(m) > 2m$. Докажем, что $a = m, b = P_0(m) - m$ подходят. В силу выбора m, они оба натуральные, причём $b > a$. Далее, по модулю $a + b = P_0(m)$ выполняются сравнения $P_0(a) = P_0(m) \equiv 0$ (очевидно) и $P_0(b) = P_0((b + a) - a) \equiv P_0(-a) = P_0(m) \equiv 0$ (в силу чётности многочлена P_0). Значит, $P_0(a) + P_0(b) \equiv 0 \pmod{a + b}$, что и требовалось.