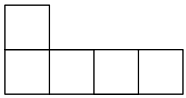
Тренировочная олимпиада, 5 задач

1. Найдите все тройки различных ненулевых чисел a, b и c, образующих арифметическую прогрессию (в каком-то порядке), и таких, что из чисел $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}$ также образуют арифметическую прогрессию (в каком-то порядке).

2. Алёна хочет покрасить клетки доски 8×8 в несколько цветов так, чтобы для любого положения Г-образной фигурки, изображённой на рисунке, пять покрытых ею клеток имели разные цвета (фигурку можно поворачивать и переворачивать). Какого наименьшего количества цветов хватит Алёне?



3. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Точки X и Y — середины сторон AB и CD. Докажите, что перпендикуляры из P на BC, из X на AC и из Y на BD пересекаются в одной точке.

4. В ряд расположено $n > 1$ лампочек. Изначально самая левая лампочка включена, остальные выключены. Каждую секунду состояние всех лампочек меняется по следующему правилу: если лампочка L и соседние с ней (у крайних лампочек одна соседняя, у некрайних — две) находятся в одном состоянии, то L выключается (или продолжает быть выключенной), иначе — включается (или продолжает быть включенной). Докажите, что существует бесконечно много значений n, при которых через какое-то время все лампочки выключатся, и бесконечно много значений n, при которых такого никогда не произойдёт.

5. Для каких натуральных n верно следующее утверждение: для произвольного многочлена P степени n с целыми коэффициентами найдутся такие различные натуральные a и b, для которых $P(a) + P(b)$ делится на $a + b$?