Тренировочная олимпиада, 4 задачи

1. Дано нечётное натуральное $n > 1$. На доске записаны числа n, $n+1$, $\ldots$, $2n-1$. Докажите, что можно вычеркнуть одно из них так, чтобы сумма оставшихся чисел не делилась ни на одно из оставшихся чисел.

2. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Точки X и Y — середины сторон AB и CD. Докажите, что перпендикуляры из P на BC, из X на AC и из Y на BD пересекаются в одной точке.

3. В ряд расположено $n > 1$ лампочек. Изначально самая левая лампочка включена, остальные выключены. Каждую секунду состояние всех лампочек меняется по следующему правилу: если лампочка L и соседние с ней (у крайних лампочек одна соседняя, у некрайних — две) находятся в одном состоянии, то L выключается (или продолжает быть выключенной), иначе — включается (или продолжает быть включенной). Докажите, что существует бесконечно много значений n, при которых через какое-то время все лампочки выключатся, и бесконечно много значений n, при которых такого никогда не произойдёт.

4. Для каких натуральных n верно следующее утверждение: для произвольного многочлена P степени n с целыми коэффициентами найдутся такие различные натуральные a и b, для которых $P(a)+P(b)$ делится на $a+b$?