

## Очный отборочный тур, решения

1. Найдите все тройки различных ненулевых чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$ , образующих арифметическую прогрессию (в каком-то порядке), и таких, что из чисел  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{b}$  и  $\frac{1}{c}$  также образуют арифметическую прогрессию (в каком-то порядке).

*Ответ:*  $\{-2x, x, 4x\}$ , где  $x \neq 0$ .

*Решение.* Без ограничения общности можно считать, что  $a < b < c$ . По условию  $2b = a + c$  и выполняется одно из равенств:

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}, \quad \frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad \text{или} \quad \frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

В первом случае, умножив на  $2abc$  и подставив  $2b = a + c$ , получим

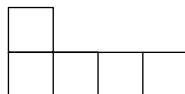
$$4ac = (a + c)c + a(a + c) \Leftrightarrow (a - c)^2 = 0 \Leftrightarrow a = c,$$

противоречие. Во втором случае, сделав то же самое, получим

$$2(a + c)c = 2ac + a(a + c) \Leftrightarrow a^2 + ac - 2c^2 = 0 \Leftrightarrow (a - c)(a + 2c) = 0.$$

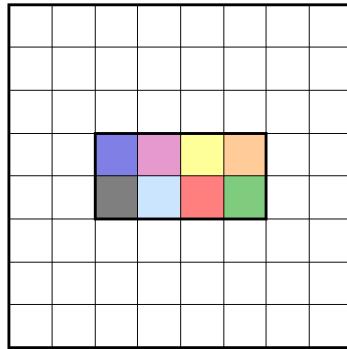
Так как  $a \neq c$ , то  $a = -2c$ , откуда  $c = -2b$ . Третий случай аналогичен второму (получается заменой  $a$  и  $c$ ). Таким образом, подходят все тройки чисел  $b = x$ ,  $a = -2x$ ,  $c = 4x$ , где  $x \neq 0$ .

2. Алёна хочет покрасить клетки доски  $8 \times 8$  в несколько цветов так, чтобы для любого положения Г-образной фигурки, изображённой на рисунке, пять покрытых ею клеток имели разные цвета (фигурку можно поворачивать и переворачивать). Какого наименьшего количества цветов хватит Алёне?



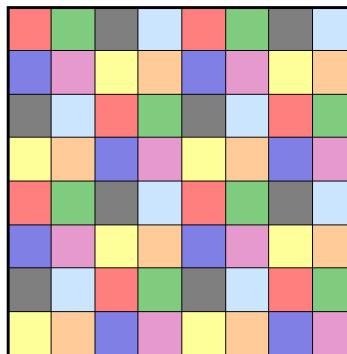
*Ответ:* 8 цветов.

*Решение.* Будем называть фигурку из условия *уголком*. Рассмотрим восемь клеток доски, образующие прямоугольник  $2 \times 4$  и расположенные по центру как на рисунке:



Легко проверить, что для любой пары клеток из восьми выбранных найдётся уголок, содержащий эти две клетки (этот уголок может вылезать за границы нашего прямоугольника  $2 \times 4$ ). Это означает, что меньше восьми цветов Алёне не хватит.

Пример для восьми цветов приведён на картинке ниже.



В этом примере

- если две клетки одного цвета находятся в одной строке или в одном столбце, то между ними стоит три другие клетки;
- если две клетки одного цвета находятся в разных строках и в разных столбцах, то они находятся в несоседних строках и несоседних столбцах.

В обоих случаях такие клетки не могут попасть в один уголок.

3. Диагонали вписанного четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $P$ . Точки  $X$  и  $Y$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$ . Докажите, что перпендикуляры из  $P$  на  $BC$ , из  $X$  на  $AC$  и из  $Y$  на  $BD$  пересекаются в одной точке.

*Решение.* Отметим точки  $K, L, M$  — основания перпендикуляров из  $X, Y, P$

на  $AC$ ,  $BD$ ,  $BC$  соответственно. Пусть  $XK$  и  $MP$  пересекаются в точке  $Z$ . Покажем, что  $LY$  тоже проходит через  $Z$ .

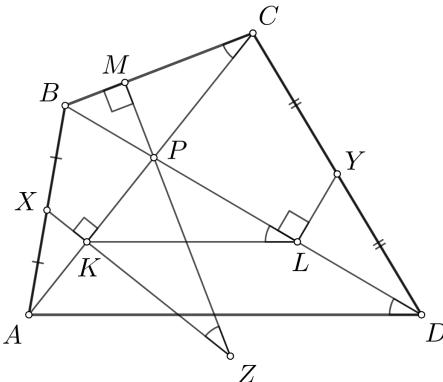
Заметим, что треугольники  $ABP$  и  $PCD$  подобны, а  $XK$  и  $YL$  — соответственные отрезки в этих треугольниках. Из этого следует, что

$$\frac{AK}{KP} = \frac{DL}{LP}.$$

По теореме Фалеса получаем, что  $KL \parallel AD$ . Заметим, что

$$\angle KLP = \angle ADB = \angle ACB = \angle KZP.$$

Первое равенство верно из-за доказанной параллельности, второе — из-за вписанности четырёхугольника  $ABCD$ , а третье — из-за вписанности четырёхугольника  $CMKZ$  (углы, опирающиеся на  $CZ$ , прямые).



Из равенства  $\angle KLP = \angle KZP$  следует вписанность четырёхугольника  $KPLZ$ , а из этой вписанности следует, что  $\angle ZLP = 90^\circ$ . Получаем, что

$$\angle ZLP + \angle PLY = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

то есть точки  $Z$ ,  $L$ ,  $Y$  лежат на одной прямой, что и требовалось.

4. В ряд расположено  $n > 1$  лампочек. Изначально самая левая лампочка включена, остальные выключены. Каждую секунду состояние всех лампочек меняется по следующему правилу: если лампочка  $L$  и соседние с ней (у крайних лампочек одна соседняя, у некрайних — две) находятся в одном состоянии, то  $L$  выключается (или продолжает быть выключенной), иначе — включается (или продолжает быть включенной). Докажите, что существует бесконечно много значений  $n$ , при которых через какое-то время все лампочки выключатся, и бесконечно много значений  $n$ , при которых такого никогда не произойдёт.

*Решение.* Докажем, что при  $n = 2^k$  все лампочки выключатся, причём этой происходит после  $2^k$  переключений. Пусть  $A_k$  — таблица размера

$2^k \times 2^k$ , заполненная нулями и единицами, и пусть  $i$ -я строка этой таблицы соответствует состоянию лампочек на  $i$ -й секунде (единицы соответствуют включенным лампочкам, а нули — выключенным). По условию верхняя строка таблицы — это  $[1, 0, 0, \dots, 0]$ .

Докажем индукцией по  $k$ , что нижняя строка таблицы равна  $[1, 1, 1, \dots, 1]$ . Из этого будет следовать утверждение индукции, потому что через секунду все лампочки будут выключены. База при  $k = 1$  очевидна. Предположим, что утверждение верно для некоторого  $k \geq 1$ . Разобьём таблицу  $A_{k+1}$  на четыре таблицы размера  $2^k \times 2^k$ :

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & O_k \\ B_k & C_k \end{pmatrix}$$

При  $m \leq 2^k$  последняя единица в  $m$ -й строке находится на позиции  $m$ , следовательно, таблица  $O_k$  состоит из нулей. Согласно индукционному предположению, нижняя строка таблицы  $A_k$  равна  $[1, \dots, 1]$ . Тогда следующая строка (то есть строка номер  $2^k + 1$ ) таблицы  $A_{k+1}$  равна

$$\underbrace{[0, \dots, 0]}_{2^k-1}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{2^k-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{2^k-1}.$$

Эта строка симметрична относительно своей середины, и эта симметрия сохраняется во всех последующих строках, потому что процедура из условия задачи симметрична. То есть таблица  $B_k$  является зеркальным отражением таблицы  $C_k$ . В частности, самый правый столбец таблицы  $B_k$  совпадает с самым левым столбцом таблицы  $C_k$ .

Рассмотрим таблицу  $C_k$  отдельно от остальной части  $A_{k+1}$ . Заметим, что строки в ней изменяются по тому же правилу, что и в изначальной задаче, так как первый (крайний левый) элемент строки зависит только от того, равны первые элементы предыдущей строки или нет. Поэтому, так как у  $A_k$  и  $C_k$  совпадают первые строки, то  $C_k = A_k$ . Таким образом, нижняя строка таблицы  $C_k$  равна  $[1, 1, \dots, 1]$ , а значит и нижняя строка таблицы  $B_k$  равна  $[1, 1, \dots, 1]$ , и переход индукции доказан.

Докажем, что при  $n = 2^k + 1$  все лампочки выключатся. Изменение состояний лампочек можно описать таблицей  $\mathcal{A}$  шириной  $2^k + 1$  с бесконечным количеством строк. Первые  $2^k$  строк образуют таблицу  $A_k$ , рассмотренную выше, с дополнительным столбцом нулей справа.

Тогда  $(2^k + 1)$ -ая строка этой таблицы  $\mathcal{A}$  равна  $[0, 0, \dots, 0, 1, 1]$ . Но она совпадает со второй строкой таблицы  $\mathcal{A}$ , записанной в обратном порядке, поэтому последующие строки будут зеркальными копиями предыдущих, начиная со второй. Следовательно, все строки в таблице будут совпадать с одной из строк со второй по  $2^k$ -ую строки или с их зеркальными копиями, а среди них по доказанному ранее строки из одних нулей нет.

5. Докажите, что среднее арифметическое чисел  $\sqrt[1]{1}, \sqrt[2]{2}, \dots, \sqrt[n]{n}$  не превосходит  $1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$ .

*Решение.* Пусть  $\sqrt[k]{k} = 1 + x$  при  $k > 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} k = (1 + x)^k &= 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2 + \dots > 1 + \frac{k(k-1)}{2}x^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k > 1 + \frac{k(k-1)}{2}x^2 \Leftrightarrow \frac{2}{k} > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{k}} > x. \end{aligned}$$

Просуммировав эти неравенства для всех  $k$  от 2 до  $n$ , получим

$$\sqrt[1]{1} + \sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n} < n + \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Заметим, что при  $k > 1$

$$\frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$

Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = 2(\sqrt{n} - 1) < 2\sqrt{n}.$$

Подставив, получим

$$\sqrt[1]{1} + \sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n} < n + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{n}.$$

Разделив на  $n$ , получим требуемое.