Геометрические неравенства

1. В треугольнике ABC точка M — середина стороны BC, точка E — произвольная точка внутри стороны AC. Известно, что $BE \geqslant 2AM$. Докажите, что треугольник ABC тупоугольный.

2. Биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. Какой из отрезков IA_1, IB_1, IC_1 наибольший, если $\angle A > \angle B > \angle C$?

3. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке L. Докажите, что сумма расстояний от точек B и C до прямой AL не превосходит длину AL.

4. Внутри треугольника ABC расположены две касающиеся окружности. Одна окружность вписана в угол B, другая — в угол C. Докажите, что сумма радиусов этих окружностей больше радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC.

5. Один треугольник расположен внутри другого. Докажите, что длина минимальной высоты внутреннего треугольника меньше, чем длина минимальной высоты внешнего треугольника.

6. Два остроугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что точки B_1 и C_1 лежат на стороне BC, а точка A_1 — внутри треугольника ABC. Пусть S и S_1 — соответственно площади этих треугольников. Докажите, что

$$\frac{S}{AB + AC} > \frac{S_1}{A_1B_1 + A_1C_1}.$$

7. Дан угол с вершиной в точке A и точка X внутри угла. На сторонах угла выбираются точки B и C так, что отрезок BC проходит через точку X. При каком положении отрезка BC

(а) площадь треугольника ABC будет наименьшей?

(б) периметр треугольника ABC будет наименьшим?

8. Точка M лежит внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ на одинаковом расстоянии от прямых AB и CD и на одинаковом расстоянии от прямых BC и AD. Оказалось, что площадь четырёхугольника $ABCD$ равна $MA \cdot MC + MB \cdot MD$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$

(а) вписанный;

(б) описанный.