Геометрический разнобой

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине A проведена биссектриса BL. Точка D симметрична A относительно BL. Обозначим через M центр описанной окружности треугольника ADC. Докажите, что прямые CM, DL и AB пересекаются в одной точке.

2. Окружность пересекает каждую сторону ромба в двух точках. Обойдём контур ромба, начав с какой-нибудь вершины, по часовой стрелке, и покрасим три отрезка каждой стороны последовательно в красный, белый и синий цвета. Докажите, что сумма длин красных отрезков равна сумме длин синих.

3. В остроугольном треугольнике ABC ($AB < BC$) проведена высота BH, а точка O — центр описанной окружности. Прямая, проходящая через точку H параллельно CO, пересекает BO в точке X. Докажите, что X и середины сторон AB и AC лежат на одной прямой.

4. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH. Точка P симметрична точке H относительно прямой, соединяющей середины сторон AC и BC. Докажите, что прямая BP содержит центр описанной окружности треугольника ABC.

5. Диагонали четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O, пересекаются в точке M. При этом O лежит внутри описанной окружности треугольника ABM , а сама эта окружность пересекает стороны AD и BC в точках N и K соответственно. Докажите, что четырёхугольники $NOMD$ и $KOMC$ имеют равные площади.

6. В треугольнике ABC провели высоты AA_1 и BB_1. Прямая A_1B_1 пересекает описанную окружность ABC в точках P и Q. Пусть X, Y — точки, симметричные A и B относительно противоположных сторон. Докажите, что P, Q, X, Y лежат на одной окружности.

7. Вписанная окружность касается сторон BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. В треугольнике $A_1B_1C_1$ биссектриса угла A_1 пересекает в точке K среднюю линию, параллельную B_1C_1. Докажите, что эта средняя линия касается окружности BKC.

8. На стороне AB вписанного четырёхугольника $ABCD$ отмечена точка P, такая, что $\angle APD = \angle BPC$. Пусть также M — точка пересечения диагоналей четырёхугольника. Докажите, что если $AD^2 + BC^2 = AB^2$, то прямая PM делит отрезок CD пополам.