Геометрический разнобой

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине A проведена биссектриса BL. Точка D симметрична A относительно BL. Обозначим через M центр описанной окружности треугольника ADC. Докажите, что прямые CM, DL и AB пересекаются в одной точке.

2. В остроугольном треугольнике ABC ($AB < BC$) проведена высота BH, а точка O — центр описанной окружности. Прямая, проходящая через точку H параллельно CO, пересекает BO в точке X. Докажите, что X и середины сторон AB и AC лежат на одной прямой.

3. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH. Точка P симметрична точке H относительно прямой, соединяющей середины сторон AC и BC. Докажите, что прямая BP содержит центр описанной окружности треугольника ABC.

4. Диагонали четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O, пересекаются в точке M (точка O лежит внутри окружности (ABM)). Окружность (ABM) пересекает стороны AD и BC в точках N и K соответственно. Докажите, что четырёхугольники $NOMD$ и $KOMC$ имеют равные площади.

5. В треугольнике ABC провели высоты AA_1 и BB_1. Прямая A_1B_1 пересекает описанную окружность ABC в точках P и Q. Пусть X, Y — точки, симметричные A и B относительно противоположных сторон. Докажите, что P, Q, X, Y лежат на одной окружности.

6. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает его описанную окружность ω в точке L. Точка M — середина стороны BC. На дуге BAC окружности ω выбрана точка E так, что $ME \parallel AL$. Прямые AB и AC пересекают прямую EL в точках P и Q соответственно. Докажите, что $EP = EQ$.

7. Вписанная окружность касается сторон BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. В треугольнике $A_1B_1C_1$ биссектриса угла A_1 пересекает в точке K среднюю линию, параллельную B_1C_1. Докажите, что эта средняя линия касается окружности BKC.

8. На стороне AB вписанного четырёхугольника $ABCD$ отмечена точка P, такая, что $\angle APD = \angle BPC$. Пусть также M — точка пересечения диагоналей четырёхугольника. Докажите, что если $AD^2 + BC^2 = AB^2$, то прямая PM делит отрезок CD пополам.