Дистанционный отборочный тур, решения

1.1. Скажем, что группа людей выстроена в *почти-упорядоченную очередь*, если для любых двух людей A и B, таких что A стоит левее B, рост A либо не больше роста B, либо не более чем на 8 сантиметров превышает рост B.

Например, пять человек с ростом $160, 165, 170, 175$ и 180 см могут выстроиться в почти-упорядоченную очередь с таким расположением роста (слева направо): $160, 170, 165, 180, 175$ см.

Сколькими различными способами можно выстроить в почти-упорядоченную очередь 10 человек, с ростом $140, 145, 150, \ldots, 185$ сантиметров?

Ответ: 89.

Решение. Заметим, что разность роста любых двух человек делится на 5. При этом, единственное натуральное число, не превосходящее 8 и кратное 5 равно 5. То есть, если A стоит левее B, то рост A либо меньше, чем рост B, либо больше его ровно на 5.

Докажем по индукции, что число способов расположить n первых человек в почти-упорядоченную последовательность равно F_{n+1} ($(n+1)$-му числу Фибоначчи). Проверим для $n = 1$ и 2: одного человека можно поставить в ряд $F_2 = 1$ способом, а двух человек можно поставить как угодно (у них разница в росте не превосходит 8), то есть $F_3 = 2$ способами.

Пусть мы доказали утверждение индукции для всех n, не превосходящих некоторого N. Докажем это утверждение для $n = N + 1$. Посмотрим, где может стоять самый высокий человек. Заметим, что правее его может стоять только следующий по росту человек, так как рост человека справа не может быть больше, чем рост самого высокого человека, а значит он может быть меньше его ровно на 5 (утверждение в начале доказательства). Таким образом, самый высокий человек стоит либо на самом правом месте, либо на предпоследнем месте и в этом случае на последнем месте стоит следующий после него по росту. То есть, мы свели задачу к расстановке N первых по росту человек в первом случае и $N-1$ первых по росту человек во втором случае. Значит, количество способов расставить $N+1$ человека равно $F_{N+1} + F_N = F_{N+2}$, что и требовалось.

1.2. Скажем, что группа людей выстроена в *почти-упорядоченную очередь*, если для любых двух людей A и B, таких что A стоит левее B, рост A либо не больше роста B, либо не более чем на 8 сантиметров превышает рост B.

Например, пять человек с ростом $160, 165, 170, 175$ и 180 см могут выстроиться в почти-упорядоченную очередь с таким расположением роста (слева направо): $160, 170, 165, 180, 175$ см.

Сколькими различными способами можно выстроить в почти-упорядоченную очередь 15 человек, с ростом $140, 145, 150, \ldots, 210$ сантиметров?

Ответ: 987.

1.3. Скажем, что группа людей выстроена в *почти-упорядоченную очередь*, если для любых двух людей A и B, таких что A стоит левее B, рост A либо не больше роста B, либо не более чем на 8 сантиметров превышает рост B.

Например, пять человек с ростом $160, 165, 170, 175$ и 180 см могут выстроиться в почти-упорядоченную очередь с таким расположением роста (слева направо): $160, 170, 165, 180, 175$ см.

Сколькими различными способами можно выстроить в почти-упорядоченную очередь 14 человек, с ростом $140, 145, 150 \ldots, 205$ сантиметров?

Ответ: 610.

1.4. Скажем, что группа людей выстроена в *почти-упорядоченную очередь*, если для любых двух людей A и B, таких что A стоит левее B, рост A либо не больше роста B, либо не более чем на 8 сантиметров превышает рост B.

Например, пять человек с ростом $160, 165, 170, 175$ и 180 см могут выстроиться в почти-упорядоченную очередь с таким расположением роста (слева направо): $160, 170, 165, 180, 175$ см.

Сколькими различными способами можно выстроить в почти-упорядоченную очередь 10 человек, с ростом $150, 155, \ldots, 195$ сантиметров?

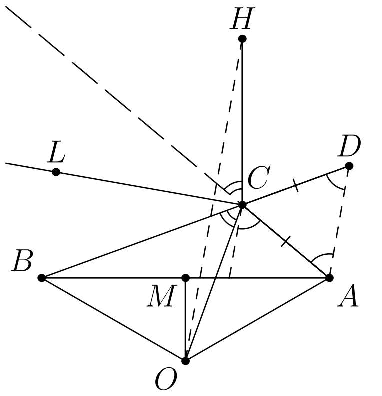
Ответ: 89.

2.1. Дан разносторонний треугольник ABC с углом при при вершине A равным 34°. Обозначим через O центр описанной окружности треугольника ABC, а через G — его точку пересечения медиан. На продолжении прямой BC за точку C отметили точку D такую, что $CD = AC$. Известно, что $AD \parallel OG$. Найдите, чему равен $\angle ABC$.

Ответ: 26.

Решение. Пусть H — ортоцентр $\triangle ABC$. Как известно, H, G и O лежат на одной прямой, то есть $AD \parallel OH$.

Так как $\angle ACB = \angle CDA + \angle DAC$ и $\angle CDA = \angle DAC$ из свойства равнобедренного треугольника, то $\angle ACB = 2\angle CDA$, а значит $\angle CDA = \frac{\angle ACB}{2}$, то есть AD параллельна биссектрисе $\angle ACB$, значит и OH параллельна биссектрисе $\angle ACB$.



Пусть CL — внешняя биссектриса угла $\angle ACB$. Тогда CL перпендикулярна внутренней биссектрисе $\angle ACB$, а значит и OH. Так как прямая CH симметрична прямой CO относительно биссектрисы угла $\angle ACB$, то CL также является и биссектрисой $\angle OCH$. При этом $CL \perp OH$, а значит в треугольнике OCH CL является высотой и биссектрисой, то есть он равнобедренный, откуда $CO = CH$. Также отсюда следует, что точки O и H лежат в разных полуплоскостях относительно CL, поэтому угол ACB тупой.

Пусть M — середина AB, тогда в силу свойств ортоцентра,

$$OM = \frac{CH}{2} = \frac{CO}{2} = \frac{AO}{2}.$$

Треугольник AMO — прямоугольный, поэтому $\angle MAO = 30°$. Треугольник AOB — равнобедренный, поэтому $\angle ABO = 30°$, а значит $\angle AOB = 120°$, откуда $\angle ACB = 180° - \frac{\angle AOB}{2} = 120°$. Следовательно, $\angle ABC = 180° - \angle ACB - \angle BAC = 26°$.

2.2. Дан разносторонний треугольник ABC с углом при при вершине A равным $51°$. Обозначим через O центр описанной окружности треугольника ABC, а через G — его точку пересечения медиан. На продолжении прямой BC за точку C отметили точку D такую, что $CD = AC$. Известно, что $AD \parallel OG$. Найдите, чему равен $\angle ABC$.

Ответ: 9.

2.3. Дан разносторонний треугольник ABC с углом при при вершине A равным $42°$. Обозначим через O центр описанной окружности треугольника ABC, а через G — его точку пересечения медиан. На продолжении прямой BC за точку C отметили точку D такую, что $CD = AC$. Известно, что $AD \parallel OG$. Найдите, чему равен $\angle ABC$.

Ответ: 18.

2.4. Дан разносторонний треугольник ABC с углом при при вершине A равным 26°. Обозначим через O центр описанной окружности треугольника ABC, а через G — его точку пересечения медиан. На продолжении прямой BC за точку C отметили точку D такую, что $CD = AC$. Известно, что $AD \parallel OG$. Найдите, чему равен $\angle ABC$.

Ответ: 34.

3.1. Рассмотрим множества $S_0, S_1, \ldots$ целых точек (то есть точек с целыми координатами) на декартовой плоскости, которые устроены следующим образом: $S_0 = \{(0,0)\}$, а S_k для всех $k > 0$ — это множество всех целых точек плоскости, находящихся на расстояния 1 ровно от одной точки из множества S_{k-1}. Например, множество S_1 состоит из четырёх точек: $S_1 = \{(0,1),(1,0),(-1,0),(0,-1)\}$.

Сколько элементов в множестве S_{1000}?

Ответ: 4096.

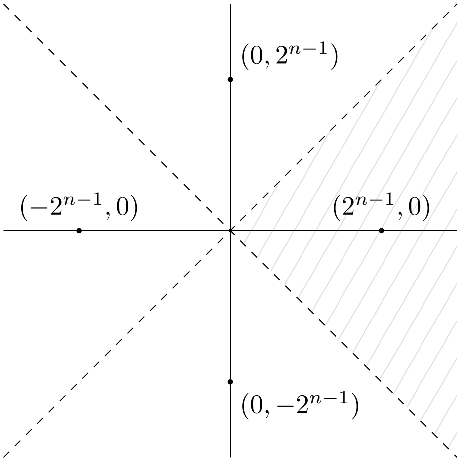
Решение. Назовём *манхэттенским расстоянием* между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) величину $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Заметим, что присутствие некоторой точки (x_0, y_0) в множестве S_n может повлиять на присутствие в множестве S_{n+k} только точек (x, y), манхеттенское расстояние от которых до (x_0, y_0) не превосходит k.

По индукции докажем, что $S_{2^n} = \{(2^n, 0), (0, 2^n), (-2^n, 0), (0, -2^n)\}$, а S_{2^n-1} состоит из всех точек, удаленных на нечетное манхэттенское расстояние от $(0,0)$, не превосходящее $2^n - 1$. Для S_{2^0} и $S_{2^1} = \{(2,0),(0,2),(-2,0),(0,-2)\}$ это верно, для S_{2^1-1} тоже.

Докажем, что если утверждение верно для $S_{2^{n-1}}$ и $S_{2^{n-1}-1}$, то верно и для S_{2^n-1}. Мы знаем, что $S_{2^{n-1}} = \{(2^{n-1}, 0), (0, 2^{n-1}), (-2^{n-1}, 0), (0, -2^{n-1})\}$. Теперь посмотрим на точки множества S_{2^n-1}, на которые может повлиять точка $(2^{n-1}, 0)$ множества $S_{2^{n-1}}$. Эти точки должны удовлетворять неравенству

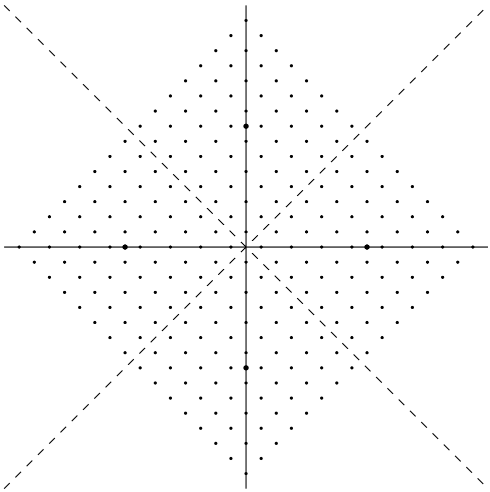
$$|x - 2^{n-1}| + |y| \leqslant 2^n - 1 - 2^{n-1} = 2^{n-1} - 1.$$

Значит, $2^{n-1} - x + |y| < 2^{n-1}$ и $|y| < x$. То есть все точки находятся строго внутри угла, ограниченного биссектрисами первой и второй координатных четвертей.



Область, на которую влияет точка $(2^{n-1}, 0)$

Аналогично можно найти области, на которые могут влиять три оставшиеся точки и увидеть, что эти области не пересекаются. Теперь заметим, что раз точки не будут влиять на одни и те же области, то получили четыре независимые задачи с одной точкой. Из предположения индукции имеем, что множество $S_{2^{n-1}+2^{n-1}-1} = S_{2^n-1}$ будет состоять из четырех множеств, заполненных целыми точками на нечетных расстояниях манхэттенских расстояниях не превосходящих $2^{n-1}-1$ от точек $(2^{n-1}, 0), (0, 2^{n-1}), (-2^{n-1}, 0), (0, -2^{n-1})$.



Множество S_{2^n-1}

Несложно видеть, что объединение этих четырех множеств дает описанное в предположении индукции множество S_{2^n-1}.

В множестве S_{2^n} все точки с нечетным манхэттенским расстоянием до

$(0,0)$ присутствовать не будут, все точки с четным расстоянием, меньшим 2^n имеют по 4 точки на расстоянии 1 в множестве S_{2^n-1}, все точки на границах квадрата с вершинами в координатах $(2^n,0),(0,2^n),(-2^n,0),(0,-2^n)$ имеют по две точки на расстоянии 1 в предыдущем множестве, кроме вершин квадрата, которые имеют ровно по одной точке на расстоянии 1. Таким образом, индуктивный переход доказан.

Теперь посмотрим как выглядит множество S_m. Представим m в виде суммы степеней двоек: $S_m = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_k}$ $(n_1 > n_2 > \ldots > n_k)$. Тогда, мы знаем, что $S_{2^{n_1}}$ состоит из четырех точек $(2^{n_1},0)$, $(-2^{n_1},0)$, $(0,2^{n_1})$, $(0,-2^{n_1})$. При этом $m-2^{n_1} < 2^{n_1}$, поэтому можно по рассуждениям, аналогичным доказательству индукционного перехода разбить задачу на четыре независимые, построить от каждой точки множество $S_{m-2^{n_1}}$ и объединить их в множество S_m. Получается, что S_m состоит из множества $S_{m-2^{n_1}}$, повторенного 4 раза, то есть $|S_m| = 4|S_{m-2^{n_1}}| = 16|S_{m-2^{n_1}-2^{n_2}}| = \ldots = 4^k$.

$1000 = 1111101000_2 = 2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^3$, то есть $k=6$ и ответ равен $4^6 = 4096$.

3.2. Рассмотрим множества $S_0, S_1, \ldots$ целых точек (то есть точек с целыми координатами) на декартовой плоскости, которые устроены следующим образом: $S_0 = \{(0,0)\}$, а S_k для всех $k>0$ — это множество всех целых точек плоскости, находящихся на расстояния 1 ровно от одной точки из множества S_{k-1}. Например, множество S_1 состоит из четырёх точек: $S_1 = \{(0,1),(1,0),(-1,0),(0,-1)\}$.

Сколько элементов в множестве S_{2026}?

Ответ: 65536.

3.3. Рассмотрим множества $S_0, S_1, \ldots$ целых точек (то есть точек с целыми координатами) на декартовой плоскости, которые устроены следующим образом: $S_0 = \{(0,0)\}$, а S_k для всех $k>0$ — это множество всех целых точек плоскости, находящихся на расстояния 1 ровно от одной точки из множества S_{k-1}. Например, множество S_1 состоит из четырёх точек: $S_1 = \{(0,1),(1,0),(-1,0),(0,-1)\}$.

Сколько элементов в множестве S_{2000}?

Ответ: 4096.

3.4. Рассмотрим множества $S_0, S_1, \ldots$ целых точек (то есть точек с целыми координатами) на декартовой плоскости, которые устроены следующим образом: $S_0 = \{(0,0)\}$, а S_k для всех $k>0$ — это множество всех целых точек плоскости, находящихся на расстояния 1 ровно от одной точки из множества S_{k-1}. Например, множество S_1 состоит из четырёх точек: $S_1 = \{(0,1),(1,0),(-1,0),(0,-1)\}$.

Сколько элементов в множестве S_{1234}?

Ответ: 1024.

4.1. Сколько существует бесконечных последовательностей целых чисел $a_1, a_2, \ldots$ таких, что $a_n + a_{n+1} = 2a_{n+2}a_{n+3} + 788$ для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$?

Ответ: 36.

Решение. Рассмотрим соотношение для n и для $n+1$:

$$a_n + a_{n+1} = 2a_{n+2}a_{n+3} + 788$$

$$a_{n+1} + a_{n+2} = 2a_{n+3}a_{n+4} + 788$$

Вычтем первое из второго. Получим:

$$a_{n+2} - a_n = 2a_{n+3}(a_{n+4} - a_{n+2})$$

Пусть существует такое n, что $a_{n+2} \neq a_n$. Тогда

$$|a_{n+2} - a_n| > |a_{n+4} - a_{n+2}|,$$

при этом $a_{n+4} \neq a_{n+2}$, иначе $a_{n+4} - a_{n+2} = 0$ и тогда $a_{n+2} - a_n = 0$. Аналогично $|a_{n+4} - a_{n+2}| > |a_{n+6} - a_{n+4}| \neq 0$. Повторив рассуждение $x = |a_{n+2} - a_n|$ раз получим цепочку неравенств

$$x = |a_{n+2} - a_n| > |a_{n+4} - a_{n+2}| > |a_{n+6} - a_{n+4}| > \ldots > |a_{n+2x+2} - a_{n+2x}| > 0,$$

то есть натуральное число x больше x различных натуральных чисел, что невозможно. Тогда, $a_{n+2} = a_n$ для любого n. Значит, последоватнльность задаётся элементами a_1 и a_2. Тогда

$$a_1 + a_2 = 2a_1a_2 + 788 \Leftrightarrow 2a_1 + 2a_2 = 4a_1a_2 + 1576 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1576 = 4a_1a_2 - 2a_1 - 2a_2 \Leftrightarrow -1575 = 4a_1a_2 - 2a_1 - 2a_2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1575 = (2a_1 - 1)(2a_2 - 1).$$

Несложно видеть, что все делители -1575 нечетны, поэтому если мы возьмем какое-то разложение -1575 в произведение двух делителей, то найденная пара однозначно соответствует паре целочисленных решений (a_1, a_2). Очевидно, что все полученные пары различны и если записать чередующуюся последовательность этих чисел, то получится требуемая в условии последовательность.

Таких разложений ровно столько, сколько целых делителей у $-1575 = -3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$. У такого числа $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ делителей.

4.2. Сколько существует бесконечных последовательностей целых чисел $a_1, a_2, \ldots$ таких, что $a_n + a_{n+1} = 2a_{n+2}a_{n+3} + 1838$ для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$?

Ответ: 36

4.3. Сколько существует бесконечных последовательностей целых чисел $a_1, a_2, \ldots$ таких, что $a_n + a_{n+1} = 2a_{n+2}a_{n+3} + 578$ для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$?

Ответ: 32

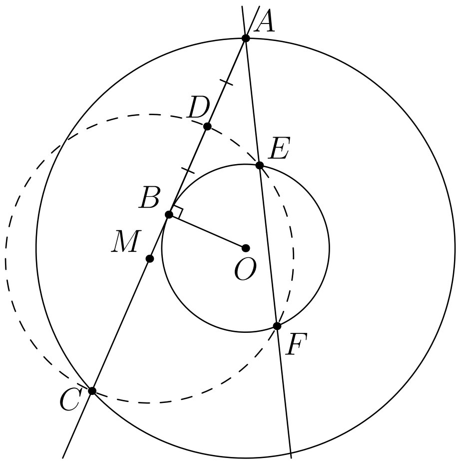
4.4. Сколько существует бесконечных последовательностей целых чисел $a_1, a_2, \ldots$ таких, что $a_n + a_{n+1} = 2a_{n+2}a_{n+3} + 338$ для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$?

Ответ: 24

5.1. Даны концентрические окружности ω_1 и ω_2, причём ω_2 лежит внутри ω_1. Из точки A, лежащей на окружности ω_1, проведена касательная AB к ω_2 (B лежит на ω_2). Пусть C — вторая точка пересечения луча AB с ω_1, а D — середина отрезка AB. Прямая, проходящая через A, пересекает ω_2 в точках E и F так, что серединные перпендикуляры к отрезкам DE и CF пересекаются в точке M, лежащей на прямой AB. Найдите, чему равно MC если известно, что $AM = 15$.

Ответ: 9.

Решение. Пусть O — центр окружностей. Тогда, $OB \perp AC$. Рассмотрим $\triangle AOC$. Он равнобедренный, OB в нем — высота. Тогда, она является и медианой, поэтому $AC = 2AB$.



По свойству касательной и секущей имеем

$$AE \cdot AF = AB^2 = \frac{AB}{2} \cdot 2AB = AD \cdot AC.$$

Тогда точки C, D, E и F лежат на одной окружности. Пересечение серединных перпендикуляров к хордам окружности есть центр этой окружности, поэтому M — центр описанной окружности четырехугольника $CDEF$. Так как он лежит на AB, то он лежит и на CD, то есть CD — диаметр этой окружности. Следовательно, M — середина CD.

Тогда $AD = \frac{AB}{2} = \frac{AC}{4}$, значит $CD = AC - AD = \frac{3}{4}AC$, откуда $CM = \frac{CD}{2} = \frac{3}{8}AC$, а $AM = AC - MC = \frac{5}{8}AC$, то есть $MC = \frac{3}{5}AM = \frac{3}{5} \cdot 15 = 9$.

5.2. Даны концентрические окружности ω_1 и ω_2, причём ω_2 лежит внутри ω_1. Из точки A, лежащей на окружности ω_1, проведена касательная AB к ω_2 (B лежит на ω_2). Пусть C — вторая точка пересечения луча AB с ω_1, а D — середина отрезка AB. Прямая, проходящая через A, пересекает ω_2 в точках E и F так, что серединные перпендикуляры к отрезкам DE и CF пересекаются в точке M, лежащей на прямой AB. Найдите, чему равно MC если известно, что $AM = 20$.

Ответ: 12.

5.3. Даны концентрические окружности ω_1 и ω_2, причём ω_2 лежит внутри ω_1. Из точки A, лежащей на окружности ω_1, проведена касательная AB к ω_2 (B лежит на ω_2). Пусть C — вторая точка пересечения луча AB с ω_1, а D — середина отрезка AB. Прямая, проходящая через A, пересекает ω_2 в точках E и F так, что серединные перпендикуляры к отрезкам DE и CF пересекаются в точке M, лежащей на прямой AB. Найдите, чему равно MC если известно, что $AM = 25$.

Ответ: 15.

5.4. Даны концентрические окружности ω_1 и ω_2, причём ω_2 лежит внутри ω_1. Из точки A, лежащей на окружности ω_1, проведена касательная AB к ω_2 (B лежит на ω_2). Пусть C — вторая точка пересечения луча AB с ω_1, а D — середина отрезка AB. Прямая, проходящая через A, пересекает ω_2 в точках E и F так, что серединные перпендикуляры к отрезкам DE и CF пересекаются в точке M, лежащей на прямой AB. Найдите, чему равно MC если известно, что $AM = 35$.

Ответ: 21.

6.1. В стране 2000 аэропортов. Президент своим указом соединил некоторые из них двусторонними авиалиниями. Затем каждый день президент страны находит аэропорт с наибольшим числом выходящих из него авиалиний, и если такой аэропорт один (то есть изо всех других аэропортов выходит меньше авиалиний), то закрывает этот аэропорт и все авиалинии, связывающие его с другими аэропортами. Какое наибольшее количество аэропортов может закрыть президент?

Ответ: 1997.

Решение. Пусть n — количество оставшихся аэропортов к какому-то моменту времени. Рассмотрим случаи: если $n = 2$, то мы не сможем закрыть ни одного аэропорта, так как они либо соединены авиалинией, либо нет, но в любом случае числа выходящих из них авиалиний равны. Если $n = 3$, то либо есть аэропорт, соединенный авиалиниями со всеми остальными, либо не соединенный ни с одним другим (иначе имеем три аэропорта с 1 исходящей авиалинией — невозможно, так как имеем нечетное число вершин с нечетной степенью). Во второй ситуации удалить нельзя ни одного аэропорта, так как аэропорт, не соединенный ни с кем удалить нельзя и мы получаем задачу с $n = 2$. В первой же ситуации удалить можно ровно один аэропорт (тот, который соединен с двумя другими), причем оставшиеся два соединены быть не должны (иначе степени всех аэропортов равны).

Если $n = 4$, то докажем, что невозможно провести авиалинии так, чтобы закрыть два аэропорта. Пусть у нас это получилось. Тогда мы удалим какой-то аэропорт и у нас останется 3 аэропорта из которых мы закроем один. Это возможно только в ситуации, когда один аэропорт соединен с двумя другими. Это значит, что из него уже выходит две авиалинии, но при этом он не был аэропортом с наибольшим числом исходящих авиалиний, иначе был бы закрыт на прошлом шаге. Значит, у закрытого на прошлом шаге аэропорта было 3 исходящие авиалинии, то есть он был соединен со всеми остальными аэропортами. Но, закрытый на шаге $n = 3$ аэропорт тогда тоже связан авиалиниями со всеми остальными аэропортами и условие нарушено. Следовательно, при $n = 4$ можно закрыть не более одного аэропорта. Значит, после закрытия 1996 аэропортов из 2000 останется 4 аэропорта из которых закрыть можно максимум один. Итого, получаем не более 1997 закрытых аэропортов.

Пример будем строить пример индуктивно. При n аэропортах степень одного аэропорта будет ровно $n - 2$, а всех остальных строго меньше $n - 2$. При этом при удалении вершины степени $n - 2$ остается пример для $n - 1$ вершины такого же вида. (последнее условие не требуется для $n = 4$)

Для $n = 4$ пример получается вида один аэропорт соединена с двумя другими и больше авиалиний нет. Действительно, тогда степень одного аэропорта равна 2, а всех остальных строго меньше 2.

Построим теперь пример для $n + 1$. Возьмем пример для n аэропортов, добавим к ним еще один и соединим его со всеми вершинами степени строго меньше $n - 2$. Таких аэропортов $n - 1$ (все, кроме одного), поэтому степень новой вершины ровно $n - 1$. При этом, степени остальных вершин теперь строго меньше $n - 2 + 1 = n - 1$, также как и выделенная в прошлом примере вершина степени $n - 2$.

Таким образом, мы сможем построить пример для $n = 2000$ и закрыть в нем 1997 аэропортов.

6.2. В стране 2026 аэропортов. Президент своим указом соединил некоторые из них двусторонними авиалиниями. Затем каждый день президент страны находит аэропорт с наибольшим числом выходящих из него авиалиний, и если такой аэропорт один (то есть изо всех других аэропортов выходит меньше авиалиний), то закрывает этот аэропорт и все авиалинии, связывающие его с другими аэропортами. Какое наибольшее количество аэропортов может закрыть президент?

Ответ: 2023.

6.3. В стране 1234 аэропортов. Президент своим указом соединил некоторые из них двусторонними авиалиниями. Затем каждый день президент страны находит аэропорт с наибольшим числом выходящих из него авиалиний, и если такой аэропорт один (то есть изо всех других аэропортов выходит меньше авиалиний), то закрывает этот аэропорт и все авиалинии, связывающие его с другими аэропортами. Какое наибольшее количество аэропортов может закрыть президент?

Ответ: 1231.

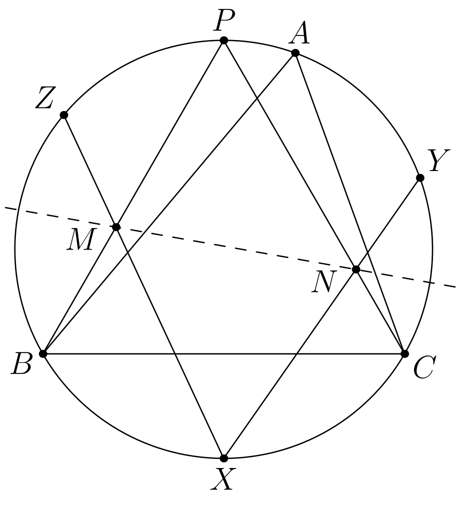
6.4. В стране 2500 аэропортов. Президент своим указом соединил некоторые из них двусторонними авиалиниями. Затем каждый день президент страны находит аэропорт с наибольшим числом выходящих из него авиалиний, и если такой аэропорт один (то есть изо всех других аэропортов выходит меньше авиалиний), то закрывает этот аэропорт и все авиалинии, связывающие его с другими аэропортами. Какое наибольшее количество аэропортов может закрыть президент?

Ответ: 2497.

7.1. Дан треугольник ABC, в котором $BC = 30$ и $\angle A = 60^\circ$. Точки X, Y, Z — середины дуг BC, CA, AB описанной окружности треугольника ABC, не содержащих точки A, B, C соответственно. Пусть P — середина дуги BAC. Прямые BP и XZ пересекаются в точке M, а прямые CP и XY — в точке N. Найдите квадрат расстояния от точки X до прямой MN.

Ответ: 300.

Решение.



По свойству вписанного угла величина меньшей дуги BC равна $120°$. Тогда величина дуги BAC равна $240°$. Дуга ZPY равна половине дуги BPC как сумма половин дуг BZ и YC. То есть величина дуги ZPY равна $120°$, а значит по свойству вписанного угла $\angle ZXY = 60°$. Так как X — середина меньшей дуги BC, то PX — биссектриса $\angle BPC$.

Точка X лежит на биссектрисе угла MPN и $\angle MXN = 60° = 90° - \frac{\angle MPN}{2}$. С одной стороны, такая точка не более чем одна. С другой стороны, центр вневписанной окружности треугольника MPN удовлетворяет этому условию. Следовательно, значит X — центр вневписанной окружности треугольника MPN.

Расстояние от X до MN равно радиусу этой окружности, а значит равно расстоянию от X до PM. Заметим, что PX — диаметр (ABC), поэтому $\angle XBP = 90°$, то есть необходимо найти BX^2.

Треугольник PBC — равнобедренный с углом $60°$, значит равносторонний, поэтому $BP = BC = 30$. При этом $\angle BPX = \frac{\angle BPC}{2} = 30°$, значит $BX = BP \cdot \tan 30° = \frac{BP}{\sqrt{3}}$, значит $BX^2 = \frac{BP^2}{3} = 300$.

7.2. Дан треугольник ABC, в котором $BC = 60$ и $\angle A = 60°$. Точки X, Y, Z — середины дуг BC, CA, AB описанной окружности треугольника ABC, не содержащих точки A, B, C соответственно. Пусть P — середина дуги BAC. Прямые BP и XZ пересекаются в точке M, а прямые CP и XY — в точке N. Найдите квадрат расстояния от точки X до MN.

Ответ: 1200.

7.3. Дан треугольник ABC, в котором $BC = 21$ и $\angle A = 60°$. Точки X, Y, Z — середины дуг BC, CA, AB описанной окружности треугольника ABC, не содержащих точки A, B, C соответственно. Пусть P — середина дуги BAC. Прямые BP и XZ пересекаются в точке M, а прямые CP и XY — в точке N. Найдите квадрат расстояния от точки X до MN.

Ответ: 147.

7.4. Дан треугольник ABC, в котором $BC = 18$ и $\angle A = 60°$. Точки X, Y, Z — середины дуг BC, CA, AB описанной окружности треугольника ABC, не содержащих точки A, B, C соответственно. Пусть P — середина дуги BAC. Прямые BP и XZ пересекаются в точке M, а прямые CP и XY — в точке N. Найдите квадрат расстояния от точки X до MN.

Ответ: 108.

8.1. На клетчатой доске размера 1000×1000 в 1000 клетках стоят кони, причём в каждой строке и в каждом столбце находится ровно один конь. При каком максимальном k при любой расстановке коней можно разместить в свободные клетки доски k ладей так, чтобы никакие две ладьи не били друг друга?

Ладьи бьют друг друга, если они стоят в одной строке или в одном столбце и между ними нет другой фигуры (коня или ладьи).

Ответ: 1998.

Решение. Оценка. Заметим, что каждая строка, кроме строк, в которых в первой или последней клетке стоит конь разбиваются своим конем на две части, в каждой которых может быть не более одной ладьи. Если же конь стоит в первой или последней клетке, то в такой строке ладей не может быть более одной. Итого, ладей на доске стоит не более $1000 \cdot 2 - 2 = 1998$.

Пример. Докажем, что при любой расстановке коней 1998 ладей мы поставить сможем. Рассмотрим то, как кони разбивают строки на части. Каждую строку, кроме двух эти кони разбивают на две части, в каждой из которых можно поставить по ладье. Рассмотрим аналогичное разбиение столбцов на части. Построим двудольный граф, вершинами одной доли которого сделаем части, на которые разбиваются строки, вершинами другой доли — части, на которые разбиваются столбцы и проведем ребра между всеми пересекающимися частями. Тогда, каждая незанятая конем клетка доски соответствует какому-то ребру в графе и наоборот.

Теперь мы хотим выбрать несколько клеток и поставить на них ладьи так, чтобы они друг друга не били. Это равносильно тому, что никакие две ладьи не находятся в одной строковой или столбцовой части. То есть, в построенном двудольном графе необходимо найти паросочетание, при этом, так как размеры долей равны 1998, то паросочетание должно быть полным, чтобы в построенном примере было 1998 ладей.

Существование полного паросочетания в двудольном графе нам гарантирует лемма Холла. Проверим ее условие для нашего графа. Выберем некоторое множество строковых частей и докажем, что они соединены ребрами, то есть пересекаются, с не меньшим количеством столбцовых частей.

Назовем строковую часть правой, если она располагается справа от коня в ее строке и левой, если она располагается слева от коня в ее строке. Пусть в выбранном множестве r правых частей и l левых частей. Несложно видеть, что все правые части имеют разный размер (иначе какие-то кони находятся в одном столбце). С левыми частями аналогично. Тогда, в выбранном множестве есть правая часть размера хотя бы r и левая часть размера хотя бы l, то есть наши части пересекают хотя бы l частей из первых l столбцов и хотя бы r частей из последних r столбцов. Тогда, если $l + r \leqslant 1000$, то утверждение доказано, ведь эти наборы столбцов не пересекаются и наши части пересекают хотя бы $l + r$ различных частей. Иначе, $l + r > 1000$ и тогда, в какой-то строке мы взяли и левую, и правую части. Пусть C — число строк, в которых мы взяли обе части, L — число строк, в которых мы взяли только левые части и R — число строк, в которых мы взяли только правые части.

Любая строка, в которой были взяты обе части пересекает 999 столбцовых частей. При этом, если $C \geqslant 2$, то выбранные части пересекаются со всеми столбцами и выбранное множество пересекает 1000 столбцовых частей. При $C > 2$ рассмотрим все C строк, в которых мы взяли по две части кроме первой и последней. Заметим, что в них присутствуют кони и эти кони делят столбец на две части, при этом в наше множество взята хотя бы одна строка над этим конем и хотя бы одна строка под этим конем, то есть множество наших частей гарантированно пересекает обе части в этом столбце. Поэтому, можно гарантировать, что множество выбранных частей пересекает хотя бы $1000 + C - 2 = 998 + C$ частей.

Сравним $998 + C$ с числом взятых частей $(2C + L + R)$. Если $998 + C \geqslant 2C + L + R$, то условие выполнено. Иначе, $C + L + R > 998$, то есть в рассмотрение попали 999 или 1000 строк. Заметим тогда, что в первом случае по принципу Дирихле в число рассматриваемых строк попадает строка, в которой конь стоит в первом столбце или строка, в которой конь стоит в последнем столбце. Такую строку можно рассматривать, как строку, в которой взяты обе части (она также пересекает все столбцы кроме одного) и тем самым усилить оценку в прошлом абзаце до $999+C$ частей и достигнуть требуемого неравенства. Если же $C+L+R = 1000$, то в рассмотрение попали все строки, а значит и строки с конем в первом и последнем столбце и оценку аналогичным образом можно усилить до $1000 + C$.

Таким образом, условие теоремы Холла выполняется, значит есть полное паросочетание.

8.2. На клетчатой доске размера 2500×2500 в 2500 клетках стоят кони, причём в каждой строке и в каждом столбце находится ровно один конь. При каком максимальном k при любой расстановке коней можно разместить в свободные клетки доски k ладей так, чтобы никакие две ладьи не били друг друга?

Ладьи бьют друг друга, если они стоят в одной строке или в одном столбце и между ними нет другой фигуры (коня или ладьи).

Ответ: 4998.

8.3. На клетчатой доске размера 2000×2000 в 2000 клетках стоят кони, причём в каждой строке и в каждом столбце находится ровно один конь. При каком максимальном k при любой расстановке коней можно разместить в свободные клетки доски k ладей так, чтобы никакие две ладьи не били друг друга?

Ладьи бьют друг друга, если они стоят в одной строке или в одном столбце и между ними нет другой фигуры (коня или ладьи).

Ответ: 3998.

8.4. На клетчатой доске размера 1500×1500 в 1500 клетках стоят кони, причём в каждой строке и в каждом столбце находится ровно один конь. При каком максимальном k при любой расстановке коней можно разместить в свободные клетки доски k ладей так, чтобы никакие две ладьи не били друг друга?

Ладьи бьют друг друга, если они стоят в одной строке или в одном столбце и между ними нет другой фигуры (коня или ладьи).

Ответ: 2998.