Программа зачёта, 2025-12

Ко всем вопросам прикреплена ссылка либо на листик в Хеопсе (и первой, и второй групп), где есть разбор, либо на другое место с разбором.

Во всех теоретических вопросах, где не указано обратное, нужно знать не только формулировку, но и доказательство.

Теория

Алгебра

1. Дискретная производная многочлена. Для заданного многочлена $Q(x)$ существует и единственный с точностью до прибавления константы многочлен $P(x)$, такой что $\Delta P(x) = Q(x)$. Функция $f(x)$ от целого аргумента является многочленом тогда и только тогда, когда существует $k \in \mathbb{N}$, такое что $\Delta^k f(x) = 0$. Интерполяционная формула Ньютона. Группа 1, Группа 2

2. Корни из единицы. Примитивные корни. Элементарные симметрические многочлены и многочлены Ньютона от корней из единицы. Разбор

3. Первообразные корни. Построение множества всех первообразных корней по одному из них. Первообразные корни существуют по простому модулю. (с доказательством). По каким другим модулям существуют первообразные корни (без доказательства). Разбор

4. Целые гауссовы числа. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики для целых гауссовых чисел. Описание простых целых гауссовых чисел. Разбор

5. Производная многочлена. Формула Тейлора для многочлена. Группа 1, Группа 2

6. Предел функции в точке. Непрерывность и дифференцируемость функции. Производная функции. Лемма Ферма. Теорема Ролля. Группа 1, Группа 2

7. Выпуклая (вогнутая) функция. Связь выпуклости и знака второй производной (формулировка). Неравенство Йенсена. Группа 1, Группа 2

Геометрия

1. Изогональное сопряжение в четырёхугольнике, два условия существования изогонально сопряжённой точки. Группа 1, Группа 2

2. Сопряжение Клоусона, эквивалентность определения через инверсию+симметрию и через теорему Клиффорда. Группа 1, Группа 2

3. Аффинные преобразования плоскости, два определения: через перевод базиса в базис и через сохранение коллинеарности точек (без доказательства эквивалентности). Сохранение отношений длин параллельных отрезков, сохранение площадей. Группа 1, Группа 2

4. Проективные преобразования плоскости, два определения: через центральные проекции и через сохранение коллинеарности точек (без доказательства эквивалентности). Образ прямых, исключительная прямая. Проективные преобразования, сохраняющие окружность, связь с полярами. Проективные преобразования, Проективные преобразования окружности 1, Проективные преобразования окружности 2

5. Проективные теоремы: Паппа, Дезарга, о трижды перспективных треугольниках, о бабочке. Есть тут

6. Линейное движение точек и прямых. Коллинеарность трёх точек, перпендикулярность прямых, проходящих через линейно двигающиеся точки. Существование и перпендикулярность прямых Гаусса и Обера. Теория есть тут, Разбор Гаусса и Обера

7. Связь степени точки с уравнением окружности. ГМТ с заданным отношением степеней относительно двух окружностей, соосность с этими окружностями. Группа 1, Группа 2

8. Теорема Кэзи, формулировка для общего случая, доказательство для случая, когда три окружности являются точками. Группа 1, Группа 2

9. Леммы о пропорциональных проекциях. Группа 1, Группа 2

10. Круговые преобразования. Биективное преобразование плоскости, пополненной бесконечной удаленной точкой, переводящее обобщённые окружности в обобщённые окружности, является круговым преобразованием. Группа 1, Группа 2

Комбинаторика

1. Diamond lemma, формулировка и доказательство. Пример использования леммы в следующей задаче. (*Chip firing game*) В вершинах конечного ориентированного графа изначально распределены фишки. За один ход одна из вершин раздаёт по фишке всем, соединённым с ней. Докажите, что если процесс раздачи фишек всегда заканчивается, то терминальное состояние не зависит от порядка операций. Группа 1, Группа 2

2. Определение непрерывности функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ в точке. Формулировка и доказательство теоремы о промежуточном значении. Пример использования в комбинаторной геометрии: объясните, почему для каждого направления существует прямая, делящая площадь данного не обязательно выпуклого многоугольника пополам. Разбор

3. Формулировка и доказательство теоремы о бутерброде на плоскости в случае, когда каждое из множеств — не обязательно выпуклый многоугольник, площадь которого нужно разделить пополам. Формулировка теоремы о бутерброде в трёхмерном пространстве в случае ограниченных множеств, объёмы которых нужно разделить пополам. Разбор

4. Определение суммы Минковского двух множеств на плоскости. Выпуклость суммы Минковского двух выпуклых множеств, с доказательством. Описание

множества векторов-сторон суммы Минковского двух выпуклых многоугольников через множества векторов-сторон слагаемых, с доказательством. Почему периметр суммы Минковского двух выпуклых многоугольников равен сумме периметров? Группа 1, Группа 2

5. Симметризация Минковского, определение. Доказательство с помощью симметризации Минковского того факта, что периметр выпуклого многоугольника с диаметром 1 не превосходит π. Группа 1, Группа 2

6. Классические теоремы аддитивной комбинаторики: теорема Коши — Дэвенпорта и теорема Эрдеша — Гинзбурга — Зива. Формулировки и доказательства. Группа 1, Группа 2

Задачи

Алгебра

1. **(а)** Докажите, что степень вхождения простого числа p в $n!$ равна $\frac{n-S_n}{p-1}$, где S_n — сумма цифр числа n в p-ичной системе счисления.
(б) *Теорема Куммера.* Пусть $k < n$ — натуральные числа. Тогда $\nu_p(C_n^k)$ равняется количеству переносов при сложении k и $n-k$ в p-ичной системе счисления. Группа 1, Группа 2

2. Многочлен $P(x)$ степени n принимает целые значения в точках $m, m+1, \ldots, m+n$ для некоторого целого m. Докажите, что $P(x)$ принимает целые значения во всех целых точках. Группа 1, Группа 2

3. Выразите коэффициенты многочлена степени не выше $n-1$ через его значения в точках $1, w_1, w_1^2, \ldots, w_1^{n-1}$. Разбор

4. Назовем конечную последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ p-уравновешенной, если все суммы вида $a_k + a_{k+p} + a_{k+2p} + \ldots$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ равны между собой. Докажите, что если 50-членная последовательность p-уравновешена для $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$, то все ее члены равны нулю. Разбор

5. Пусть p — простое число. Докажите, что $\forall n < p-1$ верно
$$1^n + 2^n + \ldots + (p-1)^n \ \vdots\ p.$$
Разбор

6. Пусть $p > 10$ — простое число. Докажите, что найдутся натуральные числа m, n с суммой меньшей p, такие что $5^m 7^n - 1 \ \vdots\ p$. Разбор

7. **Рождественская теорема Ферма.** Какие натуральные числа представляются в виде суммы двух квадратов? Разбор

8. Решите в целых числах уравнение $x^2 + 1 = y^3$. Разбор

9. Докажите, что $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ не имеет кратных комплексных корней тогда и только тогда, когда $(P(x), P'(x)) = 1$. Группа 1, Группа 2

10. Многочлен $P(x)$ степени n имеет n различных действительных корней. Какое наибольшее число его коэффициентов может равняться нулю? Группа 1, Группа 2

11. Пусть $m, n, p, q > 0$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что

$$\frac{m^p}{p} + \frac{n^q}{q} \geqslant mn.$$

Группа 1, Группа 2

Геометрия

1. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Обозначим через I_A, I_B, I_C и I_D центры вписанных окружностей треугольников DAB, ABC, BCD и CDA соответственно. Оказалось, что $\angle BI_AA + \angle I_CI_AI_D = 180^\circ$. Докажите, что $\angle BI_BA + \angle I_CI_BI_D = 180^\circ$. Группа 1, Группа 2

2. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Окружность Эйлера треугольника ABC пересекается с окружностью (BOC) в точках P и Q. Докажите, что $\angle BAP = \angle CAQ$. Группа 1, Группа 2

3. Точка D — проекция ортоцентра треугольника ABC на касательную к окружности (ABC) в точке A, точка M — середина BC. Докажите, что треугольник ADM равнобедренный. *Задачу нужно посчитать в комплексных* Разбор

4. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и AC в точках C' и B' соответственно. Прямая $B'C'$ пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1 и A_2. Аналогично определим точки B_1, B_2, C_1, C_2. Докажите, что середины отрезков AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2 лежат на одной окружности. Группа 1, Группа 2

5. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1. Внутри окружности ω отмечена точка P. Отрезки AP, BP, CP пересекают ω в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.
Задачу нужно решить, сделав проективное преобразование Разбор

6. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. На луче AO выбрана произвольная точка P. Описанные окружности треугольников APB и APC пересекают прямые AC и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что середина B_1C_1 равноудалена от точек B и C.
Задачу необходимо решать с помощью линейного движения Разбор

7. Дан четырёхугольник $ABCD$, удовлетворяющий условиям $AB = BC$, $AD = DC$ и $\angle BCD = \angle DAB = 90^\circ$. На отрезках AD и CD выбраны точки X и Y соответственно так, что $BX \perp AY$. Докажите, что $CX \perp BY$.
Задачу необходимо решать с помощью проективного движения Разбор, Тут есть про проективное движение

8. Докажите, что в неравнобедренном треугольнике расстояние от точки Фейербаха до середины одной из сторон равно сумме расстояний от точки Фейербаха до середин двух других. Группа 1, Группа 2

9. Вписанная в остроугольный треугольник ABC окружность с центром I касается его стороны BC в точке K. На сторонах AB, AC отмечены точки P и Q соответственно так, что $AP = CK$, $AQ = BK$; AD — диаметр окружности (ABC). Докажите, что $PQ \perp DI$. Группа 1, Группа 2

Комбинаторика

1. В некоторых точках натурального ряда расставлены машины, в каждой точке — не более одной. Известно, что изначально для каждого натурального n в точках $1, 2, 3, \ldots, n$ находится не более чем $[n/2]$ машин. Каждую секунду машины одновременно пытаются проехать на 1 вперёд: если точка, куда хочет проехать машина, свободна, то она проезжает; если занята, то остаётся на месте и сигналит. Докажите, что для каждой машины существует момент времени, начиная с которого она будет ехать без остановки. Группа 1, Группа 2

2. Координатная плоскость разбита на равные многоугольники площади S. Оказалось, что для каждого многоугольника строго внутри него содержится ровно одна точка с целыми координатами, а на границе целых точек нет. Докажите, что $S = 1$. Разбор

3. Докажите, что если возрастающая последовательность a_n натуральных чисел ограничена сверху значениями полинома $P(n)$ с вещественными коэффициентами (т. е. $a_n \leqslant P(n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$), то элементы этой последовательности имеют в совокупности бесконечно много простых делителей. Разбор

4. На плоскости отмечены две системы точек: $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$. Выяснилось, что для любой точки P плоскости

$$|PA_1| + |PA_2| + \ldots + |PA_n| \neq |PB_1| + |PB_2| + \ldots + |PB_n|.$$

Докажите, что центры масс систем $\{A_1, \ldots, A_n\}$, $\{B_1, \ldots, B_n\}$ совпадают. Разбор

5. Докажите, что через любой выпуклый многоугольник можно провести две перпендикулярные прямые, делящие его на 4 равные по площади части. Разбор

6. В 100 ящиках лежат яблоки, апельсины и бананы. Докажите, что можно так выбрать 51 ящик, что в них окажется не менее половины всех яблок, не менее половины всех апельсинов и не менее половины всех бананов. *В этой задаче нужно предъявить два решения: обычное и через теорему о бутерброде в трёхмерном пространстве.* Разбор

7. На координатной плоскости отмечены некоторые точки с целыми координатами. Известно, что в любом квадрате 1000×1000 хотя бы одна точка отмечена. Докажите, что найдутся 1000 отмеченных точек, лежащих на одной окружности. Группа 1, Группа 2