Дробно-линейные преобразования

Преобразования комплексной плоскости вида $z \mapsto az + b$ и $z \mapsto a\bar{z} + b$, где $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, — это преобразования подобия. Любое преобразование подобия может быть представлено в таком виде.

Упражнение. Как записывается инверсия относительно точки z_0 с радиусом R на комплексной плоскости, пополненной бесконечно удалённой точкой?

Определение. Круговыми преобразованиями комплексной плоскости, пополненной бесконечной удаленной точкой, называются преобразования вида $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ и $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ и $ad - bc \neq 0$.

Комплексная плоскость

1. **(а)** Докажите, что композиции инверсий и преобразований подобия являются круговыми преобразованиями.
(б) Докажите, что круговое преобразование, оставляющее бесконечно удаленную точку на месте, является преобразованием подобия.
(в) Докажите, что любое круговое преобразование, отличное от преобразования подобия, можно представить в виде композиции одной инверсии и движения.

2. Может ли композиция 2025 инверсий быть тождественным преобразованием?

3. Докажите, что любое биективное преобразование плоскости, пополненной бесконечной удаленной точкой, переводящее обобщённые окружности в обобщённые окружности, является круговым преобразованием.
Указание: решите сначала задачу для случая, когда бесконечно удалённая точка перешла в себя.

Определение. Двойным отношением четырех точек a, b, c, d комплексной плоскости называется величина $[a, b; c, d] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$. Если одна из точек бесконечно удалена, то содержащие ее разности вычеркиваются.

Мы доказывали, что точки A, B, C, D лежат на одной обобщенной окружности тогда и только тогда, когда $[a, b; c, d] \in \mathbb{R}$.

4. **(а)** Даны попарно различные точки a, b, c и число $z \in \mathbb{C}$. Докажите, что существует единственная точка d, такая что $[a, b; c, d] = z$.

(б) При инверсии точки a, b, c, d перешли в a', b', c', d'. Докажите, что

$$[a', b'; c', d'] = \overline{[a, b; c, d]}.$$

(в) Даны точки A, B, C и A', B', C'. Докажите, что существует ровно два круговых преобразования, переводящих A в A', B в B', C в C'.

Прямая

5. **(а)** Докажите, что множество биекций проективной прямой (то есть прямой, пополненной бесконечно удалённой точкой), сохраняющее двойные отношения, совпадает с множеством преобразований вида $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc \neq 0$.
(б) Докажите, что если f — нетождественная инволюция проективной прямой (то есть $f \circ f$ — это тождественно преобразование), сохраняющая двойные отношения, то f — это либо центральная симметрия, либо инверсия, либо композиция центральной симметрии и инверсии, с центром в той же точке.

Теорема Кэзи

В этом разделе можно забыть про дробно-линейные преобразования, достаточно факта, что двойное отношение сохраняется при инверсии.

6. **(а)** Даны две непересекающиеся окружности. Окружность ω ортогональна им обеим и пересекает их в точках A, B, C, D (точки лежат на ω в таком порядке). Докажите, что величина $(A, B; C, D)$ не зависит от выбора ω.
(б) Даны непересекающиеся круги ω и γ радиусов r и R соответственно. При инверсии они перешли в непересекающиеся круги ω_1 и γ_1 радиусов r_1 и R_1 соответственно. Пусть t и t_1 — длины общей внешней (внутренней) касательной окружностей γ и ω, γ_1 и ω_1. Докажите, что

$$\frac{t^2}{Rr} = \frac{t_1^2}{R_1 r_1}.$$

(в) **Теорема Кэзи.** Даны попарно непересекающиеся круги ω_1, ω_2, ω_3, ω_4. Пусть t_{ij} — длина общей внешней касательной к ω_i и ω_j. Предположим, существует окружность ω, касающаяся ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 внешним образом. Докажите, что $t_{12} \cdot t_{34} + t_{14} \cdot t_{23} = t_{13} \cdot t_{24}$.
(г) Осознайте, что происходит, если окружность ω касается каких-то из ω_i внутренним образом.

Теорема Кэзи верна и в обратную сторону. Живите с этим.