Неравенство Йенсена

Определение. Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется **выпуклой** на $[a, b]$, если для любых $x, y \in [a, b]$ и любых $\alpha, \beta \geqslant 0$ таких, что $\alpha + \beta = 1$, выполняется

$$f(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Функция f называется **вогнутой** на $[a, b]$, если при тех же условиях выполняется аналогичное неравенство со знаком $\geqslant$. Геометрически, функция f выпукла (вогнута), если любая точка любой хорды кривой $y = f(x)$ лежит над (под) этой кривой или на ней.

Утверждение 1. Если функция f дважды дифференцируема на интервале (a, b) и для всех $x \in (a, b)$ выполняется условие $f''(x) \geqslant 0$, то функция f выпукла на отрезке $[a, b]$. Если же для всех $x \in (a, b)$ выполняется условие $f''(x) \leqslant 0$, то функция f вогнута на отрезке $[a, b]$.

Утверждение 2. Функция $\exp x = e^x$ монотонно возрастает и биективно отображает действительную прямую на луч $(0, +\infty)$. Функция $\ln x$ является обратной функцией к $\exp x$, то есть $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln \exp x = x$ и $\forall x \in (0, +\infty),\ \exp \ln x = x$.

При решении задач можно пользоваться таблицей производных.

Функция $f(x)$	**Производная** $f'(x)$	**Условия**
c	0	$c \in \mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1$
$\ln x$	x^{-1}	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	

1. **Неравенство Йенсена.** Функция f выпукла на $[a, b]$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \geqslant 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$. Докажите индукцией по n, что

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n).$$

Для вогнутой функции выполнено аналогичное неравенство со знаком $\geqslant$.

2. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, \pi]$. Докажите, что

$$\frac{\sin x_1 + \cdots + \sin x_n}{n} \leqslant \sin\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

3. Пусть $x_1, \ldots, x_n, k_1, \ldots, k_n > 0$. Рассмотрев функцию $f(x) = \ln x$, докажите, что
$$\frac{k_1 x_1 + \cdots + k_n x_n}{k_1 + \cdots + k_n} \geqslant \sqrt[k_1+\cdots+k_n]{x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}}.$$

4. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$, $\alpha > 1$. Рассмотрев функцию $f(x) = x^\alpha$, докажите, что
$$\left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \cdots + x_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

5. **КБШ.** Даны действительные числа $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. Рассмотрев функцию $f(x) = x^2$, докажите, что
$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) \geqslant (a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2.$$

6. Пусть α, β, γ — углы некоторого треугольника (возможно, вырожденного). Какие значения может принимать величина
(а) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$;
(б) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$?

7. **Неравенство Юнга.** Пусть $m, n, p, q > 0$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что
$$\frac{m^p}{p} + \frac{n^q}{q} \geqslant mn.$$

8. Пусть $a, b, c > 0$. Докажите, что
$$\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt[a+b+c]{a^a b^b c^c} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}.$$

9. Пусть $x, y, z > 0$. Докажите, что
$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}.$$

10. Пусть $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$. Докажите, что
$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) \geqslant 64.$$

11. Дан многоугольник со сторонами $a_1, \ldots, a_n$ и периметром P. Докажите, что
$$\frac{a_1}{P - 2a_1} + \frac{a_2}{P - 2a_2} + \cdots + \frac{a_n}{P - 2a_n} \geqslant \frac{n}{n-2}.$$

12. Пусть $x, y, z, t > 0$, $x + y + z + t = 1$. Докажите, что
$$\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{1}{1-\sqrt{y}} + \frac{1}{1-\sqrt{z}} + \frac{1}{1-\sqrt{t}} \geqslant 8.$$