Производная функции

Пусть дан промежуток $I \subset \mathbb{R}$ и функция $f : I \to \mathbb{R}$.

Определение 1. Число A называется **пределом функции** $f(x)$ в точке $a \in I$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in I$, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. В математике используется следующее общепринятое обозначение для предела функции $f(x)$ в точке a:

$$A = \lim_{x \to a} f(x).$$

Определение 2. Функция f называется **непрерывной** (на I), если в каждой точке $a \in I$ предел функции совпадает с её значением, то есть $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.

Утверждение 1. Пусть дана непрерывная функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда существует точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) \geqslant f(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Точку c называют глобальным максимумом функции f. Аналогично, у функции f существует глобальный минимум.

Определение 3. Функция f называется **дифференцируемой в точке** $a \in I$, если I содержит некоторую окрестность точки a, и существует число A такое, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, при котором для всех x, удовлетворяющих условиям $0 < |x| < \delta$ и $a + x \in I$, выполняется неравенство $\left|\frac{f(a+x) - f(a)}{x} - A\right| < \varepsilon$. На языке пределов это можно записать как

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{f(a + x) - f(a)}{x}.$$

Значение A называется **производной функции f в точке** a и обозначается как $f'(a)$.

Если функция f дифференцируема в каждой точке области определения I, то f называют **дифференцируемой**. В этом случае **производной функции** f называют функцию $f' : I \to \mathbb{R}$, определённую соотношением:

$$f'(a) = \lim_{x \to 0} \frac{f(a + x) - f(a)}{x}, \quad \forall a \in I.$$

Производная k-го порядка определяется индуктивно как $f^{(k)}(x) = \left(f^{(k-1)}(x)\right)'$, где $f^{(1)}(x) = f'(x)$.

Замечание. Если функция f дифференцируема, то f непрерывна.

Утверждение 2. Пусть функции $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируемы. Тогда функции $f + g$, fg, $f \circ g$ тоже дифференцируемы, причём

$$(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))' = \alpha \cdot f'(x) + \beta \cdot g'(x),$$
$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$
$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

1. Пусть $f(x) = x^n$. Докажите, что $f(x)$ дифференцируема на всей вещественной оси, и найдите $f'(x)$.

2. **(а)** Пусть дана дифференцируемая функция $f : I \to \mathbb{R}$ такая, что для любого $x \in I$ $f(x) \neq 0$. Будем считать известным, что тогда функция $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ дифференцируема. Докажите, что $g'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$.
(б) Выведите из предыдущего пункта формулу для производной частного двух функций.

С помощью производной можно исследовать функцию на монотонность.

Утверждение 3. Пусть дана функция $f : I \to \mathbb{R}$, которая дифференцируема на всём I и $f'(x) > 0$ (< 0) для всех $x \in I$. Тогда f строго возрастает (строго убывает) на всём I.

3. Докажите, что многочлен $P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ имеет не более одного действительного корня.

Определение. Пусть дана функция $f : I \to \mathbb{R}$. Точка $a \in I$ называется

- **локальным максимумом** функции f, если существует такое $\delta > 0$, что $\forall x$: $0 < |x - a| < \delta$, выполнено $f(x) \leqslant f(a)$.
- **локальным минимумом** функции f, если существует такое $\delta > 0$, что $\forall x$: $0 < |x - a| < \delta$, выполнено $f(x) \geqslant f(a)$.

Точки локального максимума и минимума функции f называют **локальными экстремумами** функции f.

4. **(а)** *Лемма Ферма.* Пусть дана функция $f : I \to \mathbb{R}$ и точка $x_0 \in I$, являющаяся локальным экстремумом функции f. Тогда, если f дифференцируема в точке x_0, то $f'(x_0) = 0$.
(б) Пусть функция f дифференцируема в точке $x_0 \in I$ и $f'(x_0) = 0$. Верно ли, что x_0 является локальным экстремумом?

5. **(а)** *Теорема Ролля.* Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, непрерывная на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемая на интервале (a, b), принимает на концах отрезка $[a, b]$ одинаковые значения $f(a) = f(b)$. Тогда найдётся точка $c \in (a, b)$, такая что $f'(c) = 0$.
(б) Пусть $x_1 < x_2$ — корни многочлена $P(x)$. Тогда $P'(x)$ имеет корень на интервале (x_1, x_2).

6. Дан многочлен $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$. Известно, что все корни многочлена $P(x)$ различны. Докажите, что $\frac{n-1}{n} > \frac{2a_0a_2}{a_1^2}$, если $a_1 \neq 0$.

7. Многочлен $P(x)$ степени n имеет n различных действительных корней. Какое наибольшее число его коэффициентов может равняться нулю?