Производная многочлена

В этом листке под многочленом подразумевается многочлен над произвольным полем (можно считать, что это одно из $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{F}_p$).

Определение. Производной многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ называется многочлен $P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$.

Производная k-го порядка определяется индуктивно как $P^{(k)}(x) = \left(P^{(k-1)}(x)\right)'$, $P^{(1)}(x) = P'(x)$.

1. Докажите следующие свойства производной многочлена:
(а) $(\alpha \cdot P(x) + \beta \cdot Q(x))' = \alpha \cdot P'(x) + \beta \cdot Q'(x)$,
(б) $(P(x) \cdot Q(x))' = P'(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot Q'(x)$,
(в) $(P(Q(x)))' = P'(Q(x)) \cdot Q'(x)$.

2. **(а)** Дано число a. Докажите, что если для многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ над одним полем выполняется $P(a) = Q(a)$, $P'(a) = Q'(a)$, $P^{(2)}(a) = Q^{(2)}(a)$, $\ldots$, то $P(x) = Q(x)$.
(б) Формула Тейлора. Пусть многочлен $P(x)$ имеет степень n. Докажите, что

$$P(x+a) = P(a) + \frac{x}{1!}P'(a) + \frac{x^2}{2!}P^{(2)}(a) + \ldots + \frac{x^n}{n!}P^{(n)}(a).$$

3. **(а)** Докажите, что $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ не имеет кратных комплексных корней тогда и только тогда, когда $(P(x), P'(x)) = 1$.
(б) Докажите, что у многочлена $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ нет кратных корней.

4. Исходно на доске написаны многочлены $x^3 - 3x^2 + 5$ и $x^2 - 4x$. Если на доске уже написаны многочлены $f(x)$ и $g(x)$ разрешается дописать на неё многочлены $f(x) \pm g(x)$, $f(g(x))$ и $cf(x)$, где c — произвольная (не обязательно целая) константа. Может ли на доске после нескольких операций появиться ненулевой многочлен вида $x^n - 1$?

5. Обозначим через $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ корни из единицы степени n. Вычислите

$$\frac{1}{2+w_0} + \frac{1}{2+w_1} + \ldots + \frac{1}{2+w_{n-1}}.$$

6. Не равные нулю многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют одинаковый набор комплексных корней с точностью до кратностей. Аналогичное верно и для многочленов $P(x) + 1$ и $Q(x) + 1$. Докажите, что $P(x) = Q(x)$.

7. **Теорема Гаусса — Люка.** Докажите, что для отличного от константы многочлена $P(x)$ с комплексными коэффициентами множество нулей его производной $P'(x)$ принадлежит выпуклой оболочке нулей многочлена $P(x)$.