Лемма о пропорциональных проекциях

Проекцией вектора $\vec{v}$ на направление, заданное единичным вектором $\vec{e}$, назовём число $(\vec{v}, \vec{e})$.

Утверждение. Векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда равны отношения их проекций на два непараллельных направления.

Утверждение. Вектор $\vec{u}$ перпендикулярен стороне BC треугольника ABC тогда и только тогда, когда отношение его проекций на направления $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ равно $AC : AB$.

1. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Точка X такова, что $\angle XAB = \angle XDC = 90^\circ$. Докажите, что точка X, центр описанной окружности и точка пересечения диагоналей четырёхугольника лежат на одной прямой.

2. Вписанная в остроугольный треугольник ABC окружность с центром I касается его стороны BC в точке K. На сторонах AB, AC отмечены точки P и Q соответственно так, что $AP = CK$, $AQ = BK$; AD — диаметр окружности (ABC). Докажите, что $PQ \perp DI$.

3. Вписанная в остроугольный треугольник ABC окружность с центром I касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть AA' — диаметр окружности (ABC), а точка T — проекция точки A_1 на прямую B_1C_1. Докажите, что точки T, I, A' коллинеарны.

4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке I. Точка M — середина отрезка A_1B_1. Докажите, что $MI \perp AB$.

5. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены соответственно такие точки Y и X, что $BY = CX = BC$. Докажите, что прямая, соединяющая центры вписанной и описанной окружностей, перпендикулярна прямой XY.

6. Точки I и M — точки пересечения биссектрис и медиан треугольника ABC. Докажите, что
   (а) $MI \parallel BC$ тогда и только тогда, когда $2BC = AB + AC$;
   (б) $MI \perp BC$ тогда и только тогда, когда $3BC = AB + AC$.

7. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Прямые BC и B_1C_1 пересекают биссектрису угла A в точках X и Y. Докажите, что центр окружности, проходящей через X и Y и касающейся в них прямых BC и B_1C_1, лежит на медиане треугольника ABC.

8. Точки D и E выбраны на сторонах AB и AC треугольника ABC соответственно так, что $DB = BC = CE$. Пусть прямые CD и BE пересекаются в точке F. Докажите, что центр вписанной окружности I треугольника ABC, ортоцентр H треугольника DEF и середина M дуги BAC окружности (ABC) лежат на одной прямой.