

Аддитивная комбинаторика

Для числовых множеств A и B обозначим через $A + B$ множество всевозможных сумм вида $a + b$, где $a \in A$, $b \in B$.

1. Даны два конечных множества A и B , состоящих из целых чисел. Докажите, что $|A + B| \geq |A| + |B| - 1$.
2. Даны два непересекающихся конечных множества натуральных чисел A и B и два натуральных числа a и b . Известно, что если $x \in A \cup B$, то хотя бы одно из двух утверждений верно: $x - a \in A$ или $x + b \in B$. Докажите, что $a|A| = b|B|$.
3. Натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ удовлетворяют равенству

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2n - 1.$$

Докажите, что для любого натурального числа $k \in [1, 2n - 1]$ из чисел a_i можно выбрать несколько с суммой k .

4. (*Теорема Коши — Дэвенпорта*) Даны непустые подмножества A и B множества остатков по простому модулю p . Тогда $|A + B| \geq \min\{p, |A| + |B| - 1\}$.

(а) Рассмотрим две операции:

(1) замена (A, B) на $(A + \{s\}, B)$, где $s \in \mathbb{F}_p$;

(2) замена (A, B) на $(A \cap B, A \cup B)$.

Докажите, что обе операции не увеличивают $|A + B|$.

(б) Докажите теорему Коши — Дэвенпорта.

5. Дано множество A , состоящее из 100 различных натуральных чисел из отрезка $[1, 10^6]$. Докажите, что существует такое множество B , состоящее из 200 различных натуральных чисел из того же отрезка, что всевозможные суммы вида $a + b$, где $a \in A$, $b \in B$, различны (всего $200 \cdot 100$ сумм).
6. Дана последовательность (a_n) натуральных чисел. Известно, что её первые N членов $a_1, a_2, \dots, a_N$ — различные числа, а при всех $n > N$ число a_n есть наименьшее натуральное число, которое не может быть представлено в виде суммы нескольких (возможно, одного) неповторяющихся элементов множества $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$. Докажите, что для всех достаточно больших n выполнено $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$.
7. (*Теорема Эрдеша — Гинзбурга — Зива*) Среди любых $2n - 1$ целых чисел можно выбрать n чисел так, чтобы сумма выбранных была кратна n .
 - (а) Докажите, что для каждого $1 \leq k \leq p - 1$ среди любых $p - 1$ ненулевых остатков по простому модулю p всегда можно выбрать несколько с суммой сравнимой с $k \pmod{p}$.
 - (б) Докажите теорему в случае, когда n — простое число.
 - (в) Докажите теорему в общем случае.