Осенние сборы, ноябрь 2025, 10 класс
Ключевые теория и задачи

Ниже представлены теория и задачи со сборов, которые мы считаем самыми важными. Тем, кто не был на сборах, рекомендуется самостоятельно изучить их для полноценной дальнейшей работы на кружке. Полные материалы сборов выложены на странице кружка.

Теория

Алгебра

1. Корни из единицы. Примитивные корни. Элементарные симметрические многочлены и многочлены Ньютона от корней из единицы.
2. Первообразные корни. Построение всех первообразных корней по одному из них. Первообразные корни существуют только по модулям 2, 4, p^a, $2p^a$.
3. Целые гауссовы числа. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики для целых гауссовых чисел. Описание простых целых гауссовых чисел.

Геометрия

1. Проективные преобразования плоскости, два определения: через центральные проекции и через сохранение коллинеарности точек (без доказательства эквивалентности). Проективные преобразования, сохраняющие окружность.
2. Проективные теоремы: Паппа, Дезарга, о трижды перспективных треугольниках, о бабочке.
3. Линейное движение точек и прямых. Коллинеарность трёх точек, перпендикулярность прямых, проходящих через линейно двигающиеся точки.
4. Движение с сохранением двойных отношений.

Комбинаторика

1. Асимптотические неравенства: как по степеням и коэффициентам многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ понять, кто из них больше при всех достаточно больших x? Какая из двух последовательностей асимптотически больше:
(а) $\log(n)$ или $\sqrt[99]{n}$; **(б)** $P(n)$ или 1.01^n; **(в)** 99^n или $n!$; **(г)** $n!$ или 1.01^{n^2}?
2. Определение непрерывности функции $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ в точке. Формулировка и доказательство теоремы о промежуточном значении. Пример использования в комбинаторной геометрии: объясните, почему для каждого направления существует прямая, делящая площадь данного не обязательно выпуклого многоугольника пополам.

3. Формулировка и доказательство теоремы о бутерброде на плоскости в случае, когда каждое из множеств — не обязательно выпуклый многоугольник, площадь которого нужно разделить пополам. Формулировка теоремы о бутерброде в трёхмерном пространстве в случае ограниченных измеримых множеств, объём которых нужно разделить пополам.

Задачи

Алгебра

1. Выразите коэффициенты многочлена степени не выше $n-1$ через его значения в точках $1, w_1, w_1^2, \ldots, w_1^{n-1}$.

2. Назовем конечную последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ p-уравновешенной, если все суммы вида $a_k + a_{k+p} + a_{k+2p} + \ldots$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ равны между собой. Докажите, что если 50-членная последовательность p-уравновешена для $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$, то все ее члены равны нулю.

3. Пусть p — простое число. Докажите, что $\forall n < p-1$ верно

$$1^n + 2^n + \ldots + (p-1)^n \ \vdots\ p.$$

4. Пусть $p > 10$ — простое число. Докажите, что найдутся натуральные числа m, n с суммой меньшей p, такие что $5^m 7^n - 1 \ \vdots\ p$.

5. **Рождественская теорема Ферма.** Какие натуральные числа представляются в виде суммы двух квадратов?

6. Решите в целых числах уравнение $x^2 + 1 = y^3$.

Геометрия

1. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1. Внутри окружности ω отмечена точка P. Отрезки AP, BP, CP пересекают ω в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.
Обратите внимание, что в этой задаче несколько случаев!

2. С помощью линейного движения докажите, прямые Гаусса и Обера существуют и перпендикулярны друг другу.

3. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. На луче AO выбрана произвольная точка P. Описанные окружности треугольников APB и APC пересекают прямые AC и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что середина B_1C_1 равноудалена от точек B и C.
Задачу необходимо решать с помощью линейного движения

4. Дан четырёхугольник $ABCD$, удовлетворяющий условиям $AB = BC$, $AD = DC$ и $\angle BCD = \angle DAB = 90^\circ$. На отрезках AD и CD выбраны точки X и Y соответственно так, что $BX \perp AY$. Докажите, что $CX \perp BY$.
Задачу необходимо решать с помощью проективного движения

Комбинаторика

1. Координатная плоскость разбита на равные многоугольники площади S. Оказалось, что для каждого многоугольника строго внутри него содержится ровно одна точка с целыми координатами, а на границе целых точек нет. Докажите, что $S = 1$.

2. Назовём многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами *маленьким*, если при всех натуральных $n > 1000$ выполнено неравенство $|P(n)| < 1000^n$. Конечно ли множество маленьких многочленов?

3. Докажите, что если возрастающая последовательность a_n натуральных чисел ограничена сверху значениями полинома $P(n)$ с вещественными коэффициентами (т. е. $a_n \leqslant P(n)$ при всех n), то элементы этой последовательности имеют в совокупности бесконечно много простых делителей.

4. Граф на n вершинах $v_1, v_2, \ldots, v_n$ называется *графом хорд*, если на окружности можно провести n хорд $l_1, \ldots, l_n$ так, чтобы хорды l_i и l_j пересекались для пар смежных вершин v_i, v_j и не пересекались для пар несмежных. Верно ли, что рёбра любого графа можно раскрасить в 10 цветов так, чтобы рёбра любого цвета образовывали граф хорд?

5. На плоскости отмечены две системы точек: $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$. Выяснилось, что для любой точки P плоскости

$$|PA_1| + |PA_2| + \ldots + |PA_n| \neq |PB_1| + |PB_2| + \ldots + |PB_n|.$$

Докажите, что центры масс систем $\{A_1, \ldots, A_n\}$, $\{B_1, \ldots, B_n\}$ совпадают.

6. У Эванжелисты есть «делилка на троих» для блинов. Она представляет собой три луча из одной точки под углами 120° друг к другу. Делилку можно параллельно переносить вдоль любых векторов плоскости, но нельзя поворачивать. Докажите, что любой выпуклый многоугольный блин можно разделить делилкой на три равные по площади части.

7. В 100 ящиках лежат яблоки, апельсины и бананы. Докажите, что можно так выбрать 51 ящик, что в них окажется не менее половины всех яблок, не менее половины всех апельсинов и не менее половины всех бананов. *В этой задаче нужно предъявить два решения: обычное и через теорему о бутерброде в трёхмерном пространстве.*