

Городские кружки ЦПМ

Осенние сборы, ноябрь 2025, 10 класс

Материалы занятий

Содержание

I	Материалы группы 10–1	3
1	Алгебра	4
	Корни из единицы	5
	Первообразные корни. Теория	6
	Первообразные корни и друзья	7
	Целые гауссовы числа	8
	Целые гауссовы числа и враги	10
2	Геометрия	11
	Проективные преобразования	12
	Проективные преобразования окружности	14
	Линейное движение	15
	Линейное движение. Добавка	17
	Дробно-линейное движение	18
	Дробно-линейное движение. Добавка	21
3	Комбинаторика	22
	Асимптотические оценки	23
	Асимптотические оценки, часть 2	24
	Непрерывность в КГ	25
	Непрерывная комбинаторика	26
II	Материалы группы 10–2	28
1	Алгебра	29
	Корни из единицы	30
	Первообразные корни. Теория	31
	Первообразные корни и друзья	32
	Целые гауссовы числа	33
	Гауссова добавка	35
2	Геометрия	36
	Проективные преобразования	37
	Проективные преобразования окружности	39
	Линейное движение	41

Линейное движение. Добавка	43
Дробно-линейное движение	44
Дробно-линейное движение. Добавка	47
Двигательный разнбой	48
3 Комбинаторика	49
Асимптотические оценки	50
Асимптотические оценки, часть 2	51
Непрерывность в КГ	52
Непрерывная комбинаторика	53
 III Материалы группы 10–3	 55
1 Алгебра	56
Корни из единицы	57
Первообразные корни. Теория	58
Первообразные корни и друзья	59
Целые гауссовы числа	60
2 Геометрия	62
Проективные преобразования	63
Проективные преобразования окружности	65
Линейное движение	66
Линейное движение 2	68
Дробно-линейное движение	69
3 Комбинаторика	72
Асимптотические оценки	73
Асимптотические оценки, часть 2	74
Непрерывность в КГ	75
Непрерывная комбинаторика	76
 IV Тренировочные олимпиады	 78
Тренировочная олимпиада, 4 задачи	79
Тренировочная олимпиада, 5 задач	80

Часть I

Материалы группы 10–1

1 Алгебра

Корни из единицы

В этом листике за w_k будем обозначать корень из единицы n -ой степени вида $w_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, \dots, n-1$.

Определение. Комплексный корень w_k n -ой степени из единицы называется *примитивным*, если все числа $1, w_k, w_k^2, \dots, w_k^{n-1}$ различны.

1. Докажите, что корень w_k n -ой степени из единицы примитивный тогда и только тогда, когда $\text{НОД}(k, n) = 1$.

2. Найдите:

(а) $\sigma_1 = w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1}$,

(б) $\sigma_2 = w_0 w_1 + w_0 w_2 + \dots + w_{n-2} w_{n-1}$,

(в) $w_0^m + w_1^m + \dots + w_{n-1}^m$,

(г) $\sum_{0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq 2n-1} w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_n}$, где n — простое и $w_{n+i} := w_i$.

3. Даны многочлены $P(x), Q(x), R(x)$ такие, что $P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5)$ делится на $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$. Докажите, что $P(x)$ делится на $x - 1$.

4. Выразите коэффициенты многочлена степени не выше $n-1$ через его значения в точках $1, w_1, w_1^2, \dots, w_1^{n-1}$.

5. (а) Докажите, что

$$n = (1 - w_1) \cdot (1 - w_1^2) \cdot (1 - w_1^3) \cdot \dots \cdot (1 - w_1^{n-1}).$$

Для каких других корней из единицы верно данное равенство?

(б) Для нечетных n найдите, чему равно

$$|S_n| = \left| 1 + w_1 + w_1^4 + w_1^9 + \dots + w_1^{(n-1)^2} \right|.$$

(в) Пусть теперь n — простое. Чему равно S_n^2 ?

6. Назовем конечную последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ p -уравновешенной, если все суммы вида $a_k + a_{k+p} + a_{k+2p} + \dots$ ($k = 1, 2, \dots, p$) равны между собой. Докажите, что если 50-членная последовательность p -уравновешена для $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$, то все ее члены равны нулю.

7. Докажите, что если для корней простой степени p и целых чисел α_i , $i = 1, \dots, p-1$ выполнено, что $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_{p-1} w_{p-1} = 0$, то все $\alpha_i = 0$.

8. Пусть $p > 2$ некоторое простое число. Назовем p -элементное подмножество множества чисел $\{1, 2, \dots, 2p\}$ *эффектным*, если сумма его элементов делится на p . Найдите число эффективных подмножеств.

Первообразные корни. Теория

Определение. Натуральное число a называется первообразным корнем по модулю n , если $(a, n) = 1$ и показатель числа a по модулю n равен $\varphi(n)$.

Если a первообразный корень, то $1, a, a^2, \dots, a^{\varphi(n)-1}$ — это все вычеты по модулю n , взаимно простые с n .

1. Пусть по модулю n нашелся первообразный корень a . Сколько всего существует остатков по модулю n , являющихся первообразными корнями? Как они связаны с a ?
2. Пусть p — простое число, а d — некоторый делитель $p - 1$.
 - (а) Докажите, что многочлен $x^d - 1 \in \mathbb{F}_p[x]$ имеет ровно d корней по модулю p .
 - (б) Докажите, что есть не более $\varphi(d)$ вычетов, показатель которых по модулю p равен d .
 - (в) Докажите, что есть в точности $\varphi(d)$ вычетов, показатель которых по модулю p равен d . Выведите отсюда, что по модулю p есть первообразный корень.
3. Пусть $p > 3$ — простое число. Чему равно произведение первообразных корней по модулю p , не превосходящих p ?
4. Пусть $p > 2$ — простое число.
 - (а) Докажите, что если a — первообразный корень по модулю p , то либо a , либо $a + p$ является первообразным корнем по модулю p^2 .
 - (б) Докажите, что если a — первообразный корень по модулю p^2 , то a также является первообразным корнем по модулю p^k при любом натуральном $k \geq 2$.
 - (в) Докажите, что для любого натурального k существует первообразный корень по модулю $2p^k$.

Тем самым мы доказали, что первообразные корни существуют по модулю $p^k, 2p^k$ для простого $p > 2$. Так же нетрудно проверить, что есть первообразные корни по модулям 2 и 4.

5.
 - (а) Докажите, что не существует первообразного корня по модулю 2^m при $m > 2$.
 - (б) Докажите, что первообразных корней по оставшимся модулям так же не существует.

Первообразные корни и друзья

1. Пусть p — простое число. Докажите, что $\forall n < p - 1$ верно

$$1^n + 2^n + \dots + (p-1)^n \not\equiv p.$$

2. Докажите, что 2 первообразный корень по модулю 179.
3. Пусть $p > 10$ — простое число. Докажите, что найдутся натуральные числа m, n с суммой меньше p , такие что $5^m 7^n - 1 \equiv p$.
4. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами таков, что он в каждой целой точке принимает значение сравнимое с 0 или 1 по некоторому фиксированному простому модулю p . Известно, что $P(0) = 0$, $P(1) = 1$. Докажите, что степень $P(x)$ больше или равна $p - 1$.
5. Составное число n называется *числом Кармайкла*, если для любого a взаимно простого с n верно $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$. Найдите все числа Кармайкла вида $3pq$, где p и q — простые.
6. Алексей и Сергей играют в следующую игру. Они по очереди называют цифры от 1 до 9 без повторений пока не наберется семизначное число X . Алексей побеждает, если существует некоторое натуральное число, которое при возведении в 7 степень может оканчиваться на X , в противном случае побеждает Сергей. Первый ходит Алексей. Кто победит при правильной игре?
7. Докажите, что для любого натурального числа m существует $n \in \mathbb{N}$, такое, что в десятичной записи числа 5^n содержится не менее m нулей.
8. Дано простое число $p \neq 2$ и натуральные числа a, b, c, d взаимно простые с p . Рассмотрим последовательность $x_k = \text{ord}_p(a^k c - b^k d)$. Известно, что существует такое натуральное M , для которого выполняется $x_k \leq M$ для любого индекса k . Докажите, что среди чисел x_k встречаются не более 2 различных.

Целые гауссовы числа

Определение. Комплексное число $a + bi$ называется *целым гауссовым*, если a и b — целые числа. Множество целых гауссовых чисел обозначается $\mathbb{Z}[i]$. Нормой $\|a + bi\|$ такого числа называется квадрат его модуля, то есть $a^2 + b^2$.

Определение. Целое гауссово число u кратно целому гауссовому числу v , если существует целое гауссово число w такое, что $u = vw$.

Определение. Целое гауссово число u называется обратимым, если 1 кратно u , то есть существует целое гауссово v такое, что $uv = 1$.

Определение. Ненулевое целое гауссово число u называется *простым*, если оно необратимо и имеет только тривиальные делители, то есть обратимые числа, а также произведения обратимых чисел на u . Необратимые числа, не являющиеся простыми, называются *составными*.

1. Найдите все обратимые целые гауссовы числа.
2. (а) Докажите, что для целых гауссовых чисел возможно деление с остатком: для любых $a, b \in \mathbb{Z}[i]$, $b \neq 0$, существуют $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ такие, что $a = bq + r$ и $\|r\| < \|b\|$. *Замечание.* Такие q и r определены, вообще говоря, неоднозначно.
(б) Осознайте, что для нахождения НОД двух гауссовых чисел можно применять алгоритм Евклида, как и для обычных целых. Докажите, что если a, b — два гауссовых целых числа и $d = (a, b)$ — их НОД, то существуют целые гауссовы x, y такие, что $d = ax + by$.
(в) **Лемма Евклида.** Докажите, что если p — простое гауссово и ab делится на p , то a или b делится на p .
(г) **Основная теорема арифметики.** Докажите, что любое целое гауссово число, отличное от обратимых, единственным образом (с точностью до порядка множителей и умножения на обратимые) представляется в виде произведения простых гауссовых.
3. Пусть целое гауссово число z не является ни чисто мнимым, ни чисто вещественным.
(а) Докажите, что если его норма — простое натуральное число, то z является простым гауссовым.
(б) Докажите, что если z является простым гауссовым, то его норма — простое натуральное число.
4. (а) Докажите, что натуральное простое число p либо является простым гауссовым числом, либо представляется в виде $z\bar{z}$, где $z = a + bi$, $\bar{z}$ — простые гауссовы числа.
(б) Докажите, что простое число вида $4k + 3$ является простым гауссовым.
(в) Докажите, что простое $p = 4k + 1$ представляется в виде произведения сопряжённых простых гауссовых чисел.
(г) Используя предыдущий пункт, докажите, что простое число вида p представляется в виде суммы квадратов, если и только если $p = 2$ или $p = 4k + 1$,

причём в этом случае такое представление единственно.

5. **Рождественская теорема Ферма.** Какие натуральные числа представляются в виде суммы двух квадратов?
6. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x^2 + y^2 = 5^{100}$.
7. Решите в целых числах уравнение
 - (а) $x^2 + 1 = y^3$
 - (б) $x^2 + 4 = y^3$.

Целые гауссовы числа и враги

1. Дано простое целое гауссово число p . Какое наибольшее количество целых гауссовых чисел можно выбрать так, чтобы разность никаких двух из них не делилась на p ?
2. *Малая теорема Ферма.* Пусть p — целое простое гауссово число. Докажите, что для любого целого гауссово числа z число $z^{\|p\|} - z$ делится на p .
3. Докажите, что если a и b взаимно простые и $a^2 + b^2$ — квадрат целого числа, то одно из чисел $a + bi, b + ai$ является квадратом целого гауссова.
4. Даны натуральные числа x, y, z , удовлетворяющие уравнению $xy = z^2 + 1$. Докажите, что существуют целые a, b, c, d такие, что

$$x = z^2 + b^2, \quad y = c^2 + d^2 \quad \text{и} \quad z = ac + bd.$$

5. (а) Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i] = \{a + \sqrt{5}bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Также как и для целых гауссовых чисел определим обратимые, простые и составные числа в $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$. Найдите в $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ элемент, который представляется в виде произведения простых элементов, более чем одним способом.
(б) Существует ли такой элемент в $\mathbb{Z}[\sqrt{2}i]$?
6. Решите уравнение $x^2 + 2 = y^3$ в целых числах.
7. Докажите, что если два числа представляются в виде $a^2 - ab + b^2$ с целыми a и b , то их произведение тоже.
8. (а) Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, где ω — корень третьей степени из единицы. Докажите, что кольцо $\mathbb{Z}[\omega]$ — евклидово, то есть в нём можно определить норму $N : \mathbb{Z}[\omega] \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ так, что для любых ненулевых $c, d \in \mathbb{Z}[\omega]$ существуют $q, r \in \mathbb{Z}[\omega]$, удовлетворяющие равенству $c = dq + r$ и $N(r) < N(d)$. Сформулируйте и докажите основную теорему арифметики для $\mathbb{Z}[\omega]$.
(б) Как устроены простые (неразложимые) числа в $\mathbb{Z}[\omega]$?
(в) Используя числа $a + b\omega$, докажите, что уравнение $a^3 + b^3 = c^3$ не имеет решений в натуральных числах.

2 Геометрия

Проективные преобразования

Определение. *Проективным преобразованием* проективной плоскости называется композиция нескольких центральных проекций и аффинных преобразований.

Альтернативное определение. Проективное преобразование — это биективное отображение проективной плоскости в себя, сохраняющее коллинеарность любых трёх коллинеарных точек.

- Для любой прямой существует проективное преобразование, которое переводит её в бесконечно удалённую.
 - Проективные преобразования сохраняют двойные отношения четырёх точек, лежащих на одной прямой.
1. На плоскости даны две пересекающиеся прямые ℓ и m и точка P , не лежащая ни на одной из них. Рассмотрим всевозможные четырёхугольники $ABCD$ такие, что A и B лежат на ℓ , C и D лежат на m , прямые AD и BC пересекаются в точке P . Докажите, что ГМТ пересечения диагоналей четырёхугольников $ABCD$ является прямой.
 2. *Теорема Паппа.* Точки A, B, C лежат на одной прямой; точки A_1, B_1, C_1 лежат на другой прямой. Докажите, что точки пересечения пар прямых AB_1 и A_1B , BC_1 и B_1C , CA_1 и C_1A лежат на одной прямой.
 3. Два треугольника назовём *перспективными*, если прямые, соединяющие их соответственные вершины, пересекаются в одной точке.
 - (а) *Теорема Дезарга.* Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что они перспективны тогда и только тогда, когда точки пересечения прямых AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , CA и C_1A_1 лежат на одной прямой.
 - (б) Известно, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ перспективны и треугольники ABC и $B_1C_1A_1$ перспективны. Докажите, что треугольники ABC и $C_1A_1B_1$ тоже перспективны.
 4. На проективной плоскости даны точки A, B, C, D , никакие три из которых не лежат на одной прямой, и точки A_1, B_1, C_1, D_1 , удовлетворяющие тому же условию. Докажите, что проективное преобразование, переводящее одну четвёрку точек в другую
 - (а) существует; (б) единственно.
 5. Докажите, что с помощью одной линейки невозможно разделить данный отрезок пополам.
 6. (а) На листе бумаги нарисованы точка A и две прямые, пересекающиеся в точке B вне листа. При помощи одной линейки нарисуйте на листе прямую AB .
(б) На листе бумаги нарисованы точки A и B . При помощи линейки конечной длины проведите отрезок AB .

7. На прямой a выбраны точки $A_1, A_2, \dots, A_n$, а на прямой b — точки $B_1, B_2, \dots, B_n$ так, что

$$A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n, \quad B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = B_{n-1}B_n.$$

Докажите, что точки пересечения прямых A_iB_{i+1} и B_iA_{i+1} , где $i = 1, \dots, n-1$, лежат на одной прямой.

8. Докажите, что любой выпуклый пятиугольник проективно эквивалентен пятиугольнику, образованному точками пересечения его диагоналей.

Проективные преобразования окружности

Утверждение. Существует проективное преобразование, которое окружность оставляет на месте, а данную точку внутри окружности переводит в центр этой окружности.

При этом в бесконечно удалённую прямую переходит полярная точка.

Полезное наблюдение. При проективном преобразовании сохраняются отношения отрезков на прямых, параллельных исключительной (и только на них).

1. Внутри окружности отмечена точка S , через которую проходят хорды AC , BD , $A'C'$, $B'D'$. Прямые AB и $A'B'$ пересекаются в точке X , прямые CD и $C'D'$ — в точке Y . Докажите, что точки X , Y , S лежат на одной прямой.
2. Докажите, что в описанном четырёхугольнике точка пересечения диагоналей совпадает с точкой пересечения диагоналей четырёхугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами.
3. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается его сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 . Внутри окружности ω отмечена точка P . Отрезки AP , BP , CP пересекают ω в точках A_2 , B_2 , C_2 . Докажите, что прямые A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 пересекаются в одной точке.
Обратите внимание, что в этой задаче несколько случаев!
4. *Теорема о бабочке.* Пусть O — середина хорды MN окружности. AB и CD — произвольные хорды, проходящие через O , P и Q — точки пересечения AD и BC с MN . Докажите, что O — середина отрезка PQ .
5. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности ω . Пусть PQ — диаметр ω , перпендикулярный прямой AC . Докажите, что прямые BP и DQ пересекаются на прямой AC .
6. Медиана AK треугольника ABC пересекает вписанную окружность ω в точках M и N . Прямые, проходящие через точки M и N параллельно прямой BC , вторично пересекают окружность ω в точках X и Y соответственно. Прямые AX и AY пересекают отрезок BC в точках P и Q . Докажите, что $BP = CQ$.
7. В треугольнике ABC проведены чевианы AA_1 , BB_1 , CC_1 , пересекающиеся в одной точке. Из точек A_1 , B_1 , C_1 проведены касательные ко вписанной окружности, отличные от сторон треугольника. Соответственные точки касания обозначены через A_2 , B_2 , C_2 . Докажите, что прямые AA_2 , BB_2 , CC_2 пересекаются в одной точке.
8. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон BC и AC в точках D и E соответственно. Пусть P — точка на меньшей дуге DE окружности такая, что $\angle APE = \angle DPB$. Отрезки AP и BP пересекают отрезок DE в точках K и L соответственно. Докажите, что $2KL = DE$.

Линейное движение

Определение. Фигура (точка, прямая) движется *линейно*, если существует такой вектор $\vec{v}$, что за время t фигура смещается на вектор $t \cdot \vec{v}$.

В случае прямой имеется в виду не то, что каждая её точка смещается на вектор $\vec{v}$, а что прямая как цельный объект смещается на вектор $\vec{v}$.

1. Верно ли, что линейно движется
 - (а) середина отрезка, концы которого движутся линейно;
 - (б) прямая постоянного направления, проведённая через линейно движущуюся точку;
 - (в) прямая, две точки которой движутся линейно;
 - (г) точка пересечения двух прямых, которые движутся линейно?
2. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB , AC в точках C_1 , B_1 соответственно. На отрезках BC_1 , AB_1 отмечены точки P и Q соответственно, что $PC_1 = QB_1$. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой B_1C_1 .
3. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC . На его сторонах AB , AC отмечены точки C_1 и B_1 соответственно, причем $\angle AB_1M = \angle AC_1M$. Докажите что перпендикуляры, восстановленные из точек B_1 , C_1 , M к сторонам треугольника, на которых они лежат, пересекаются в одной точке.
4. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC . На луче AO выбрана произвольная точка P . Описанные окружности треугольников APB и APC пересекают прямые AC и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что середина B_1C_1 равноудалена от точек B и C .
5. На стороне BC треугольника ABC с центром описанной окружности O выбрана точка D , а на сторонах AB и AC — точки F и E так, что $BF = DF$ и $CE = DE$.
 - (а) Докажите, что четырёхугольник $AEOF$ вписанный.
 - (б) Пусть H — ортоцентр треугольника DEF . Докажите, что $HO \parallel BC$.

Утверждение. Если три линейно движущиеся точки лежат на одной прямой в три различных момента времени, то они всегда лежат на одной прямой.

6.
 - (а) *Прямая Гаусса.* На плоскости проведено четыре прямых общего положения. Докажите, что середины трёх отрезков, соединяющих точку пересечения двух прямых с точкой пересечения двух оставшихся (и так для трёх разбиений прямых на пары), лежат на одной прямой.
 - (б) *Прямая Обера.* Докажите, что ортоцентры четырёх треугольников, образованных четырьмя прямыми общего положения, лежат на одной прямой.
 - (в) Докажите, что прямая Обера перпендикулярна прямой Гаусса.
 - (г) Докажите, что если четырёхугольник $ABCD$ вписанный, то прямая Обера четырёх прямых, содержащих его стороны, проходит через точку пересечения диагоналей.

7. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки X и Y соответственно. Прямая XY пересекает окружность (ABC) в точках P и Q . Докажите, что середины отрезков BY , CX , XY и PQ лежат на одной окружности.
8. Докажите, что середины трёх отрезков, соединяющих проекции произвольной точки плоскости на пары противоположных сторон или диагоналей вписанного четырёхугольника, лежат на одной прямой.

Линейное движение. Добавка

1. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $PQ \parallel BC$. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке K . Точка A' симметрична точке A относительно прямой BC . Отрезок $A'K$ пересекает окружность (APQ) в точке S . Докажите, что окружность (BSC) касается окружности (APQ) .
2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω с центром в точке O . Диагонали AC и BD пересекаются в точке P . На отрезке OP выбрана точка Q . Точки E и F — проекции Q на прямые AD и BC соответственно. Точки M и N на окружности (QEF) таковы, что $QM \parallel AC$ и $QN \parallel BD$. Прямые ME и NF пересекаются в точке X . Докажите, что $CX = DX$.
3. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Прямая ℓ пересекает прямые AI , BI и CI в точках D , E и F соответственно. Серединные перпендикуляры к отрезкам AD , BE и CF образуют треугольник Δ с описанной окружностью ω . Докажите, что окружности ω и (ABC) касаются.

Дробно-линейное движение

Определение. Пусть точка B зависит от точки A . Будем говорить, что точка B *движется с сохранением двойных отношений точки A* , если для любых четырёх положений точки A : A_1, A_2, A_3, A_4 , соответствующие им положения точки B : B_1, B_2, B_3, B_4 , будут давать такое же двойное отношение: $(A_1, A_2, A_3, A_4) = (B_1, B_2, B_3, B_4)$. Аналогично можно говорить про прямые, проходящие через фиксированную точку.

Утверждение 0. Если B получается из точки A преобразованием, сохраняющим двойное отношение, или цепочкой таких преобразований, то B будет сохранять двойные отношения A .

Вопрос. Кажется, почти все преобразования сохраняют двойные отношения. Приведите какие-нибудь примеры зависимости одной точки от другой, чтобы двойные отношения не сохранялись, при этом зависимость была более простая.

Утверждение 1. Если точки B и C двигаются с сохранением двойных отношений точки A по одной и той же прямой (окружности) и при этом при трёх положениях точки A (для трёх моментов времени) точки B и C совпадают, то они всегда совпадают.

Рекомендация. Всегда сводите задачу именно к совпадению двух объектов, сохраняющих двойные отношения друг друга.

Пример 1. На высоте BH треугольника ABC выбрана произвольная точка P . Прямые AP и CP пересекают прямые BC и AB в точках A_1 и C_1 соответственно. Докажите, что HB — биссектриса угла A_1HC_1 .

Решение. Сам бог велел двигать точку P по высоте BH . Тогда точки A_1 и C_1 будут сохранять двойные отношения точки P , потому что получаются из неё проекциями из точек A и C соответственно. Рассмотрим теперь точку F на прямой BC такую, что $\angle FHB = \angle C_1HB$. Её можно получить из точки C_1 отразив симметрично относительно высоты BH и спроецировав из точки H . Так как оба преобразования сохраняют двойные отношения, то точка F всё ещё сохраняет двойные отношения точки P и должна вообще говоря по задаче совпадать с точкой A_1 . Собственно, если в три момента времени так будет, то пользуясь утверждением 1 мы решим задачу. В качестве частных случаев подходят положения P совпадающие с B , H и ортоцентром треугольника ABC . Проверьте сами.

Записать сохранение двойных отношении можно используя стрелочную нотацию: $P \rightarrow A_1$ подразумевает, что точка A_1 сохраняет двойные отношения точки P . *Нотация не является общепринятой!* Аналогично можно записать вторую часть $P \rightarrow C_1 \rightarrow HC_1 \rightarrow HF \rightarrow F$. Здесь мы заодно показали как можно формально обосновать сохранение двойных отношений точкой F используя прямые в качестве промежуточных «мостиков».

Замечание. Это же решение можно оформить совершенно не используя терминологию движения точек, частных случаев и вот этого всего. Покажем как.

Решение. Проведём высоты AH_a и CH_c , которые пересекаются в точке K и введём точку F как в первом решении. Тогда

$$(B, A_1, H_a, C) = (B, P, K, H) = (B, C_1, H_c, A) = (HB, HC_1, HH_c, HA) = \\ = (HB, HF, HH_a, HC) = (B, F, H_a, C).$$

Откуда очевидно $F = A_1$, ч. т. д. (довольно короткая запись, неправда ли?)

Совет. Как искать положения? Как видно из формы решения двигать можно любую из точек в цепочке. Каждая точка двигается по какой-то своей траектории и может иметь на ней свои «хорошие» положения. Поэтому для поиска положений надо задать вопрос: «Какие точки двигаются? По чему они двигаются? (не просто «по прямой», а, например, «по медиане/биссектрисе») Какие хорошие положения есть на этой штучке? В разобранным примере мы двигали точку по высоте, поэтому хорошими положением был ортоцентр.

Подсказка. Так как решение происходит на проективной плоскости (иначе двойным отношениям «худо»), то часто одно из «хороших» положений это бесконечно удалённая точка прямой, по которой двигается точка.

Учебное задание. В первых трёх задачах надо решить через движение точек, а сдать можно *только* записав это решение через проецирование двойных отношений.

1. На отрезках биссектрис AK , CL треугольника ABC взяты точки P и Q так, что $\angle QBA = \angle PBC$. Докажите, что прямые AQ и CP пересекаются на биссектрисе угла ABC . (без леммы об изогоналях, пожалуйста)
2. Внешние биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC с наименьшей стороной BC пересекаются в точке I_A . На отрезках BC_1 , CB_1 взяли точки X и Y соответственно так, что XY проходит через I_A . Докажите, что отражения прямых CX и BY относительно осей CI_A и BI_A соответственно пересекаются на прямой B_1C_1 .
3. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BH выбрана произвольная точка P . Точки A' и C' — середины сторон BC и AB соответственно. Перпендикуляр, опущенный из A' на CP , пересекается с перпендикуляром, опущенным из C' на AP , в точке K . Докажите, что точка K равноудалена от точек A и C .
4. Через точку X внутри параллелограмма $ABCD$ проведены прямые, параллельные его сторонам. Они пересекают стороны AB , BC , CD и DA в точках P , Q , R , S соответственно. Докажите, что прямые CQ , BR и AX пересекаются в одной точке.
5. Внутри угла AOB выбрана произвольная точка M . Точки P и Q выбраны на сторонах этого угла таким образом, что $\angle PMO = \angle QMO$. Докажите, что всевозможные прямые PQ проходят через одну и ту же точку.
6. Дан четырёхугольник $ABCD$, удовлетворяющий условиям $AB = BC$, $AD = DC$ и $\angle BCD = \angle DAB = 90^\circ$. На отрезках AD и CD выбраны точки X и Y соответственно так, что $BX \perp AY$. Докажите, что $CX \perp BY$.

7. Четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром I . На отрезках AI , CI отмечены точки X и Y так, что $\angle XBY = \frac{1}{2}\angle ABC$. Докажите, что $\angle XDY = \frac{1}{2}\angle ADC$.
8. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно таким образом, что $AP = CQ$. Обозначим через M — середину AC , а через K — точку пересечения отрезков AQ и CP . **(а)** Докажите, что точка, симметричная K относительно M , лежит на биссектрисе угла B . **(б)** Разберите в этой задаче 6 разных положений.

Иногда кажется, что никаких произвольных точек нигде не выбрано и может возникнуть вопрос «что же тогда двигать?». Тогда можно двигать какую-нибудь одну вершинку, чтобы перебрать все возможные треугольники.

9. Точки K и L на стороне AC треугольника ABC выбраны таким образом, что $\angle ABK = \angle CBL = 90^\circ$. Докажите, что середина высоты, опущенной из вершины B , середина отрезка KL и центр описанной окружности треугольника ABC лежат на одной прямой.

Дробно-линейное движение. Добавка

1. Пять прямых пересекаются в одной точке. В каждый из десяти углов вписано по окружности; окружности касаются друг друга по циклу. На сторонах углов отмечено по точке. Известно, что для всех углов, кроме одного, отрезок, соединяющий отмеченные точки на сторонах, касается вписанной в угол окружности. Докажите, что для оставшегося угла это также верно.
2. Выпуклый шестиугольник $AQCPBR$ вписан в окружность Ω , и при этом треугольники ABC и PQR описаны около одной и той же окружности ω . Прямая ℓ , параллельная прямой BC и не совпадающая с ней, касается окружности ω . Прямая ℓ пересекает отрезок QR в точке X . Докажите, что $\angle PAB = \angle CAH$.
3. Прямая ℓ проходит через вершину A описанного четырехугольника $ABCD$, пересекает отрезок BC в точке M и прямую CD в точке N . Обозначим за I , J и K инцентры треугольников ABM , MCN и AND . Докажите, что ортоцентр треугольника IKJ лежит на прямой ℓ .

3 Комбинаторика

Асимптотические оценки

1. (а) Каких натуральных чисел, не превосходящих 10^{30} , больше: точных квадратов или представимых в виде суммы точного куба и шестой степени?
(б) Верно ли, что все достаточно большие натуральные числа можно представить в виде суммы точного квадрата и точного куба?
(в) Докажите, что существует такое натуральное число n , для которого уравнение $x^2 + y^3 + z^5 = n$ имеет хотя бы тысячу решений в натуральных числах.
2. На бесконечной клетчатой доске двое по очереди делают ходы. Первый за ход ставит в пустую клетку один крестик, второй за свой ход ставит в сто пустых клеток по одному нолику. Цель первого — поставить крестики
(а) в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными линиям сетки;
(б) в клетках сеточки $n \times n$ (сеточка $n \times n$ — набор клеток на пересечении n строк с n столбцами);
(в) в углах квадрата со сторонами, параллельными линиям сетки.
Может ли второй игрок ему помешать?
3. (а) Из клетчатой плоскости выкинули все клетки, обе координаты которых делятся на 4. Докажите, что её нельзя разбить на доминошки.
(б) (Классика) Из клетчатой плоскости выбросили все клетки, обе координаты которых делятся на 100. Можно ли все оставшиеся клетки обойти шахматным конём, побывав на каждой ровно по одному разу?
4. Докажите, что в любой последовательности a_n различных натуральных чисел, при всех натуральных n удовлетворяющих неравенству $a_n < 100n$, найдётся число, в десятичной записи которого встречаются три цифры 7 подряд.
5. Докажите, что плоскость нельзя покрыть 99 фигурами, каждая из которых является внутренностью параболы $y = ax^2$ в некоторой системе координат (для каждой фигуры — своя система и свой коэффициент a).
6. Координатная плоскость разбита на равные многоугольники площади S . Оказалось, что для каждого многоугольника строго внутри него содержится ровно одна точка с целыми координатами, а на границе целых точек нет. Докажите, что (а) $S \geq 1$; (б) $S \leq 1$.
7. Назовём многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами *маленьким*, если при всех натуральных $n > 1000$ выполнено неравенство $|P(n)| < 1000^n$. Конечно ли множество маленьких многочленов?
8. На бесконечной клетчатой доске в клетках квадрата $n \times n$ изначально стояли n^2 пашек (в каждой клетке — по одной пашке). За один ход разрешается одной пашкой перепрыгнуть через соседнюю по стороне или диагонали пашку при условии, что клетка, на которую она приземляется, свободна; при этом пашка, через которую прыгнули, снимается с доски. Петя сделал не более $0.74n^2$ ходов. Докажите, что при всех достаточно больших n Петя сможет сделать ещё один ход.

Асимптотические оценки, часть 2

1. Могут ли значения квадратного трёхчлена с целыми коэффициентами во всех достаточно больших натуральных точках оказаться (а) точными кубами; (б) точными степенями, не ниже третьей?
2. (Финал ВсОШ-2021) Дана бесконечная клетчатая плоскость. Учительница и класс из 30 учеников играют в игру, делая ходы по очереди: сначала учительница, затем по очереди все ученики, затем снова учительница, и т. д. За один ход можно покрасить единичный отрезок, являющийся границей между двумя соседними клетками. Дважды красить отрезки нельзя. Учительница побеждает, если после хода одного из 31 игроков найдется клетчатый прямоугольник 1×2 или 2×1 такой, что у него вся граница покрашена, а единичный отрезок внутри него не покрашен. Докажите, что ученики не смогут помешать учительнице победить.
3. (а) Докажите, что при всех достаточно больших n количество чисел вида $2^a 3^b$ ($a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), принадлежащих множеству $\{1, 2, \dots, n\}$, не превосходит $\sqrt[3]{n}$.
(б) Докажите, что если возрастающая последовательность a_n натуральных чисел ограничена сверху значениями полинома $P(n)$ с вещественными коэффициентами, то элементы этой последовательности имеют в совокупности бесконечно много простых делителей.
4. Граф на n вершинах $v_1, v_2, \dots, v_n$ называется *графом хорд*, если на окружности можно провести n хорд $l_1, \dots, l_n$ так, чтобы хорды l_i и l_j пересекались для пар смежных вершин v_i, v_j и не пересекались для пар несмежных.
(а) Докажите, что существует граф, не являющийся графом хорд.
(б) Верно ли, что рёбра любого графа можно раскрасить в 10 цветов так, чтобы рёбра любого цвета образовывали граф хорд?
5. Существует ли такое 2025-значное натуральное число, перестановкой цифр которого можно получить 2025 различных 2025-значных точных квадратов?
6. На белой плоскости нарисована чёрная ограниченная клякса. Каждую минуту происходит следующее: каждая точка плоскости перекрашивается в тот цвет, который преобладает в круге радиуса 1 с центром в ней (все точки перекрашиваются одновременно). Докажите, что существует такая клякса, площадь которой через несколько минут будет хотя бы в 1000 раз больше, чем у исходной кляксы.

Непрерывность в КГ

Функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *непрерывной* в точке $x_0 \in [a, b]$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такая $\delta > 0$, что для каждого $x \in [a, b]$ выполнено $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Теорема. Непрерывная функция f на отрезке $[a, b]$ принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$.

1. Докажите или опровергните: для любого **(а)** выпуклого; **(б)** не обязательно выпуклого многоугольника и любого направления существует прямая данного направления, делящая периметр пополам.
2. Дан (не обязательно выпуклый) многоугольник и точка P , лежащая **(а)** вне; **(б)** внутри выпуклой оболочки его вершин. Докажите, что существует прямая через точку P , делящая площадь пополам. Единственна ли такая прямая?
3. Докажите, что для любого выпуклого многоугольника существует прямая, делящая пополам и площадь, и периметр.
4. (*Теорема о бутерброде*) На плоскости даны два многоугольника (многоугольники не обязательно выпуклые и могут пересекаться). Докажите, что есть прямая, делящая площадь каждого из них пополам.
Бутерброд из хлеба и колбасы можно разрезать на две равные по содержанию хлеба и колбасы части.
5. На плоскости отмечены две системы точек: $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$. Выяснилось, что для любой точки P плоскости

$$|PA_1| + |PA_2| + \dots + |PA_n| \neq |PB_1| + |PB_2| + \dots + |PB_n|.$$

Докажите, что центры масс систем $\{A_1, \dots, A_n\}$, $\{B_1, \dots, B_n\}$ совпадают.

6. Пабло нарисовал на плоскости квадрат, на каждой стороне (или продолжении стороны) отметил по точке, а затем стёр квадрат. Оказалось, что никакие два из шести отрезков, соединяющих эти четыре точки, не перпендикулярны. Казимир хочет восстановить квадрат Пабло. Какое наименьшее число способов это сделать может быть?
7. Докажите, что через любой выпуклый многоугольник можно провести две перпендикулярные прямые, делящие его на 4 равные по площади части.
8. У Эвангелисты есть «делилка на троих» для блинов. Она представляет собой три луча из одной точки под углами 120° друг к другу. Делилку можно параллельно переносить вдоль любых векторов плоскости, но нельзя поворачивать. Докажите, что любой выпуклый многоугольный блин можно разделить делилкой на три равные по площади части.

Непрерывная комбинаторика

1. В домике Копатыча припасены 15 бочонков мёда различных объёмов. Докажите, что Копатыч может разлить один бочонок на два новых так, чтобы полученные 16 бочонков можно было разбить на две группы по 8 с равным суммарным объёмом мёда.
2. В 10 одинаковых бочонках разлит квас, причём общий объём кваса меньше объёма одного бочонка. За одну операцию можно выбрать бочонок и отлить из него любое количество кваса поровну в остальные бочонки. За какое наименьшее число операций можно уравнять объёмы кваса во всех бочонках?
3. Дан набор из 99 положительных чисел с суммой S . Докажите, что есть не менее 2^{49} способов выбрать 50 из них с суммой строго больше $S/2$.
4. В 99 ящиках лежат яблоки и апельсины. Докажите, что можно так выбрать 50 ящиков, что в них окажется не менее половины всех яблок и не менее половины всех апельсинов.
5. Группа в детском саду насчитывает 30 детей. Дети встали в ряд так, что возрасты (положительные вещественные числа) любых двух соседних детей различаются не более чем на 1 год.
 - (а) Докажите, что воспитатель может построить детей парами в ряд так, чтобы в любых двух соседних в ряду парах суммарный возраст отличался не более чем на 1 год.
 - (б) Докажите, что воспитатель может построить детей тройками в ряд так, чтобы в любых двух соседних в ряду тройках суммарный возраст отличался не более чем на 1 год.
 - (в) На городской ёлке 30 детей взяли за руки в хоровод так, что возрасты любых двух соседей различаются не более чем на 1 год. Докажите, что можно разбить детей на пары и расставить пары по кругу так, чтобы суммарный возраст в каждой двух соседних парах различался бы не более чем на 1 год.
6. На продуктовом складе валяются 20 кусков сыра разных сортов. Докажите, что можно разрезать не более двух кусков так, чтобы сыр можно было разложить на две кучки, равные по весу и по цене.
7. (Классика) Даны взаимно простые натуральные числа p и q . Хозяйка испекла пирог. К хозяйке в гости придут то ли p , то ли q гостей. На какое минимальное число не обязательно равных частей ей придётся заранее разрезать пирог, чтобы его можно было раздать всем гостям поровну в обоих случаях?
8. Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.
9. В 100 ящиках лежат яблоки, апельсины и бананы. Докажите, что можно так выбрать 51 ящик, что в них окажется не менее половины всех яблок, не менее

половины всех апельсинов и не менее половины всех бананов.

Часть II

Материалы группы 10–2

1 Алгебра

Корни из единицы

В этом листике за w_k будем обозначать корень из единицы n -ой степени вида $w_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, \dots, n-1$.

Определение. Комплексный корень w_k n -ой степени из единицы называется *примитивным*, если все числа $1, w_k, w_k^2, \dots, w_k^{n-1}$ различны.

1. Докажите, что корень w_k n -ой степени из единицы примитивный тогда и только тогда, когда $\text{НОД}(k, n) = 1$.

2. Найдите:

(а) $\sigma_1 = w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1}$,

(б) $\sigma_2 = w_0 w_1 + w_0 w_2 + \dots + w_{n-2} w_{n-1}$,

(в) $w_0^m + w_1^m + \dots + w_{n-1}^m$,

(г) $\sum_{0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq 2n-1} w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_n}$, где n — простое и $w_{n+i} := w_i$.

3. Даны многочлены $P(x), Q(x), R(x)$ такие, что $P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5)$ делится на $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$. Докажите, что $P(x)$ делится на $x - 1$.

4. Выразите коэффициенты многочлена степени не выше $n-1$ через его значения в точках $1, w_1, w_1^2, \dots, w_1^{n-1}$.

5. (а) Докажите, что

$$n = (1 - w_1) \cdot (1 - w_1^2) \cdot (1 - w_1^3) \cdot \dots \cdot (1 - w_1^{n-1}).$$

Для каких других корней из единицы верно данное равенство?

(б) Для нечетных n найдите, чему равно

$$|S_n| = \left| 1 + w_1 + w_1^4 + w_1^9 + \dots + w_1^{(n-1)^2} \right|.$$

(в) Пусть теперь n — простое. Чему равно S_n^2 ?

6. Назовем конечную последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ p -уравновешенной, если все суммы вида $a_k + a_{k+p} + a_{k+2p} + \dots$ ($k = 1, 2, \dots, p$) равны между собой. Докажите, что если 50-членная последовательность p -уравновешена для $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$, то все ее члены равны нулю.

7. Докажите, что если для корней простой степени p и целых чисел α_i , $i = 1, \dots, p-1$ выполнено, что $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_{p-1} w_{p-1} = 0$, то все $\alpha_i = 0$.

8. Пусть $p > 2$ некоторое простое число. Назовем p -элементное подмножество множества чисел $\{1, 2, \dots, 2p\}$ *эффектным*, если сумма его элементов делится на p . Найдите число эффективных подмножеств.

Первообразные корни. Теория

Определение. Натуральное число a называется первообразным корнем по модулю n , если $(a, n) = 1$ и показатель числа a по модулю n равен $\varphi(n)$.

Если a первообразный корень, то $1, a, a^2, \dots, a^{\varphi(n)-1}$ — это все вычеты по модулю n , взаимно простые с n .

1. Пусть по модулю n нашелся первообразный корень a . Сколько всего существует остатков по модулю n , являющихся первообразными корнями? Как они связаны с a ?
2. Пусть p — простое число, а d — некоторый делитель $p - 1$.
 - (а) Докажите, что многочлен $x^d - 1 \in \mathbb{F}_p[x]$ имеет ровно d корней по модулю p .
 - (б) Докажите, что есть не более $\varphi(d)$ вычетов, показатель которых по модулю p равен d .
 - (в) Докажите, что есть в точности $\varphi(d)$ вычетов, показатель которых по модулю p равен d . Выведите отсюда, что по модулю p есть первообразный корень.
3. Пусть $p > 3$ — простое число. Чему равно произведение первообразных корней по модулю p , не превосходящих p ?
4. Пусть $p > 2$ — простое число.
 - (а) Докажите, что если a — первообразный корень по модулю p , то либо a , либо $a + p$ является первообразным корнем по модулю p^2 .
 - (б) Докажите, что если a — первообразный корень по модулю p^2 , то a также является первообразным корнем по модулю p^k при любом натуральном $k \geq 2$.
 - (в) Докажите, что для любого натурального k существует первообразный корень по модулю $2p^k$.

Тем самым мы доказали, что первообразные корни существуют по модулю $p^k, 2p^k$ для простого $p > 2$. Так же нетрудно проверить, что есть первообразные корни по модулям 2 и 4.

5.
 - (а) Докажите, что не существует первообразного корня по модулю 2^m при $m > 2$.
 - (б) Докажите, что первообразных корней по оставшимся модулям так же не существует.

Первообразные корни и друзья

1. Пусть p — простое число. Докажите, что $\forall n < p - 1$ верно

$$1^n + 2^n + \dots + (p-1)^n \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

2. Докажите, что 2 первообразный корень по модулю 179.
3. Пусть $p > 10$ — простое число. Докажите, что найдутся натуральные числа m, n с суммой меньше p , такие что $5^m 7^n - 1 \equiv 0 \pmod{p}$.
4. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами таков, что он в каждой целой точке принимает значение сравнимое с 0 или 1 по некоторому фиксированному простому модулю p . Известно, что $P(0) = 0$, $P(1) = 1$. Докажите, что степень $P(x)$ больше или равна $p - 1$.
5. Составное число n называется *числом Кармайкла*, если для любого a взаимно простого с n верно $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$. Найдите все числа Кармайкла вида $3pq$, где p и q — простые.
6. Алексей и Сергей играют в следующую игру. Они по очереди называют цифры от 1 до 9 без повторений пока не наберется семизначное число X . Алексей побеждает, если существует некоторое натуральное число, которое при возведении в 7 степень может оканчиваться на X , в противном случае побеждает Сергей. Первый ходит Алексей. Кто победит при правильной игре?
7. Докажите, что для любого натурального числа m существует $n \in \mathbb{N}$, такое, что в десятичной записи числа 5^n содержится не менее m нулей.
8. Дано простое число $p \neq 2$ и натуральные числа a, b, c, d взаимно простые с p . Рассмотрим последовательность $x_k = \text{ord}_p(a^k c - b^k d)$. Известно, что существует такое натуральное M , для которого выполняется $x_k \leq M$ для любого индекса k . Докажите, что среди чисел x_k встречаются не более 2 различных.

Целые гауссовы числа

Определение. Комплексное число $a + bi$ называется *целым гауссовым*, если a и b — целые числа. Множество целых гауссовых чисел обозначается $\mathbb{Z}[i]$. Нормой $\|a + bi\|$ такого числа называется квадрат его модуля, то есть $a^2 + b^2$.

Определение. Целое гауссово число u кратно целому гауссовому числу v , если существует целое гауссово число w такое, что $u = vw$.

Определение. Целое гауссово число u называется обратимым, если 1 кратно u , то есть существует целое гауссово v такое, что $uv = 1$.

Определение. Ненулевое целое гауссово число u называется *простым*, если оно необратимо и имеет только тривиальные делители, то есть обратимые числа, а также произведения обратимых чисел на u . Необратимые числа, не являющиеся простыми, называются *составными*.

1. Найдите все обратимые целые гауссовы числа.
2. (а) Докажите, что для целых гауссовых чисел возможно деление с остатком: для любых $a, b \in \mathbb{Z}[i]$, $b \neq 0$, существуют $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ такие, что $a = bq + r$ и $\|r\| < \|b\|$. *Замечание.* Такие q и r определены, вообще говоря, неоднозначно.
(б) Осознайте, что для нахождения НОД двух гауссовых чисел можно применять алгоритм Евклида, как и для обычных целых. Докажите, что если a, b — два гауссовых целых числа и $d = (a, b)$ — их НОД, то существуют целые гауссовы x, y такие, что $d = ax + by$.
(в) **Лемма Евклида.** Докажите, что если p — простое гауссово и ab делится на p , то a или b делится на p .
(г) **Основная теорема арифметики.** Докажите, что любое целое гауссово число, отличное от обратимых, единственным образом (с точностью до порядка множителей и умножения на обратимые) представляется в виде произведения простых гауссовых.
3. Пусть целое гауссово число z не является ни чисто мнимым, ни чисто вещественным.
(а) Докажите, что если его норма — простое натуральное число, то z является простым гауссовым.
(б) Докажите, что если z является простым гауссовым, то его норма — простое натуральное число.
4. (а) Докажите, что натуральное простое число p либо является простым гауссовым числом, либо представляется в виде $z\bar{z}$, где $z = a + bi$, $\bar{z}$ — простые гауссовы числа.
(б) Докажите, что простое число вида $4k + 3$ является простым гауссовым.
(в) Докажите, что простое $p = 4k + 1$ представляется в виде произведения сопряжённых простых гауссовых чисел.
(г) Используя предыдущий пункт, докажите, что простое число вида p представляется в виде суммы квадратов, если и только если $p = 2$ или $p = 4k + 1$,

причём в этом случае такое представление единственно.

5. **Рождественская теорема Ферма.** Какие натуральные числа представляются в виде суммы двух квадратов?
6. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x^2 + y^2 = 5^{100}$.
7. Решите в целых числах уравнение
 - (а) $x^2 + 1 = y^3$
 - (б) $x^2 + 4 = y^3$.

Гауссова добавка

1. Дано простое целое гауссово число p . Какое наибольшее количество целых гауссовых чисел можно выбрать так, чтобы разность никаких двух из них не делилась на p ?
2. *Малая теорема Ферма.* Пусть p — целое простое гауссово число. Докажите, что для любого целого гауссово числа z число $z^{\|p\|} - z$ делится на p .
3. Докажите, что если a и b взаимно простые и $a^2 + b^2$ — квадрат целого числа, то одно из чисел $a + bi, b + ai$ является квадратом целого гауссова.
4. Даны натуральные числа x, y, z , удовлетворяющие уравнению $xy = z^2 + 1$. Докажите, что существуют целые a, b, c, d такие, что

$$x = z^2 + b^2, \quad y = c^2 + d^2 \quad \text{и} \quad z = ac + bd.$$

2 Геометрия

Проективные преобразования

Определение. *Проективным преобразованием* проективной плоскости называется композиция нескольких центральных проекций и аффинных преобразований.

Альтернативное определение. Проективное преобразование — это биективное отображение проективной плоскости в себя, сохраняющее коллинеарность любых трёх коллинеарных точек.

- Для любой прямой существует проективное преобразование, которое переводит её в бесконечно удалённую.
 - Проективные преобразования сохраняют двойные отношения четырёх точек, лежащих на одной прямой.
1. На плоскости даны две пересекающиеся прямые ℓ и m и точка P , не лежащая ни на одной из них. Рассмотрим всевозможные четырёхугольники $ABCD$ такие, что A и B лежат на ℓ , C и D лежат на m , прямые AD и BC пересекаются в точке P . Докажите, что ГМТ пересечения диагоналей четырёхугольников $ABCD$ является прямой.
 2. *Теорема Палпа.* Точки A, B, C лежат на одной прямой; точки A_1, B_1, C_1 лежат на другой прямой. Докажите, что точки пересечения пар прямых AB_1 и A_1B , BC_1 и B_1C , CA_1 и C_1A лежат на одной прямой.
 3. Два треугольника назовём *перспективными*, если прямые, соединяющие их соответственные вершины, пересекаются в одной точке.
 - (а) *Теорема Дезарга.* Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что они перспективны тогда и только тогда, когда точки пересечения прямых AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , CA и C_1A_1 лежат на одной прямой.
 - (б) Известно, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ перспективны и треугольники ABC и $B_1C_1A_1$ перспективны. Докажите, что треугольники ABC и $C_1A_1B_1$ тоже перспективны.
 4. На проективной плоскости даны точки A, B, C, D , никакие три из которых не лежат на одной прямой, и точки A_1, B_1, C_1, D_1 , удовлетворяющие тому же условию. Докажите, что проективное преобразование, переводящее одну четвёрку точек в другую
 - (а) существует; (б) единственно.
 5. Докажите, что с помощью одной линейки невозможно разделить данный отрезок пополам.
 6. (а) На листе бумаги нарисованы точка A и две прямые, пересекающиеся в точке B вне листа. При помощи одной линейки нарисуйте на листе прямую AB .
 - (б) На листе бумаги нарисованы точки A и B . При помощи линейки конечной длины проведите отрезок AB .

7. На прямой a выбраны точки $A_1, A_2, \dots, A_n$, а на прямой b — точки $B_1, B_2, \dots, B_n$ так, что

$$A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n, \quad B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = B_{n-1}B_n.$$

Докажите, что точки пересечения прямых A_iB_{i+1} и B_iA_{i+1} , где $i = 1, \dots, n-1$, лежат на одной прямой.

8. Докажите, что любой выпуклый пятиугольник проективно эквивалентен пятиугольнику, образованному точками пересечения его диагоналей.

Проективные преобразования окружности

Утверждение. Существует проективное преобразование, которое окружность оставляет на месте, а данную точку внутри окружности переводит в центр этой окружности.

При этом в бесконечно удалённую прямую переходит полярная точка.

Полезное наблюдение. При проективном преобразовании сохраняются отношения отрезков на прямых, параллельных исключительной (и только на них).

1. Внутри окружности отмечена точка S , через которую проходят хорды AC , BD , $A'C'$, $B'D'$. Прямые AB и $A'B'$ пересекаются в точке X , прямые CD и $C'D'$ — в точке Y . Докажите, что точки X , Y , S лежат на одной прямой.
2. Докажите, что в описанном четырёхугольнике точка пересечения диагоналей совпадает с точкой пересечения диагоналей четырёхугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами.
3. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается его сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 . Внутри окружности ω отмечена точка P . Отрезки AP , BP , CP пересекают ω в точках A_2 , B_2 , C_2 . Докажите, что прямые A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 пересекаются в одной точке.
Обратите внимание, что в этой задаче несколько случаев!
4. *Теорема о бабочке.* Пусть O — середина хорды MN окружности. AB и CD — произвольные хорды, проходящие через O , P и Q — точки пересечения AD и BC с MN . Докажите, что O — середина отрезка PQ .
5. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности ω . Пусть PQ — диаметр ω , перпендикулярный прямой AC . Докажите, что прямые BP и DQ пересекаются на прямой AC .
6. Медиана AK треугольника ABC пересекает вписанную окружность ω в точках M и N . Прямые, проходящие через точки M и N параллельно прямой BC , вторично пересекают окружность ω в точках X и Y соответственно. Прямые AX и AY пересекают отрезок BC в точках P и Q . Докажите, что $BP = CQ$.
7. В треугольнике ABC проведены чевианы AA_1 , BB_1 , CC_1 , пересекающиеся в одной точке. Из точек A_1 , B_1 , C_1 проведены касательные ко вписанной окружности, отличные от сторон треугольника. Соответственные точки касания обозначены через A_2 , B_2 , C_2 . Докажите, что прямые AA_2 , BB_2 , CC_2 пересекаются в одной точке.

Добавка

8. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон BC и AC в точках D и E соответственно. Пусть P — точка на меньшей дуге DE окружности такая,

что $\angle APE = \angle DPB$. Отрезки AP и BP пересекают отрезок DE в точках K и L соответственно. Докажите, что $2KL = DE$.

Линейное движение

Определение. Фигура (точка, прямая) движется *линейно*, если существует такой вектор $\vec{v}$, что за время t фигура смещается на вектор $t \cdot \vec{v}$.

В случае прямой имеется в виду не то, что каждая её точка смещается на вектор $\vec{v}$, а что прямая как цельный объект смещается на вектор $\vec{v}$.

- Верно ли, что линейно движется
 - середина отрезка, концы которого движутся линейно;
 - прямая постоянного направления, проведённая через линейно движущуюся точку;
 - прямая, две точки которой движутся линейно;
 - точка пересечения двух прямых, которые движутся линейно?
- Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB , AC в точках C_1 , B_1 соответственно. На отрезках BC_1 , AB_1 отмечены точки P и Q соответственно, что $PC_1 = QB_1$. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой B_1C_1 .
- Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC . На его сторонах AB , AC отмечены точки C_1 и B_1 соответственно, причем $\angle AB_1M = \angle AC_1M$. Докажите что перпендикуляры, восстановленные из точек B_1 , C_1 , M к сторонам треугольника, на которых они лежат, пересекаются в одной точке.
- Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC . На луче AO выбрана произвольная точка P . Описанные окружности треугольников APB и APC пересекают прямые AC и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что середина B_1C_1 равноудалена от точек B и C .
- На стороне BC треугольника ABC с центром описанной окружности O выбрана точка D , а на сторонах AB и AC — точки F и E так, что $BF = DF$ и $CE = DE$.
 - Докажите, что четырёхугольник $AEOF$ вписанный.
 - Пусть H — ортоцентр треугольника DEF . Докажите, что $HO \parallel BC$.

Утверждение. Если три линейно движущиеся точки лежат на одной прямой в три различных момента времени, то они всегда лежат на одной прямой.

- Прямая Гаусса.* На плоскости проведено четыре прямых общего положения. Докажите, что середины трёх отрезков, соединяющих точку пересечения двух прямых с точкой пересечения двух оставшихся (и так для трёх разбиений прямых на пары), лежат на одной прямой.
 - Прямая Обера.* Докажите, что ортоцентры четырёх треугольников, образованных четырьмя прямыми общего положения, лежат на одной прямой.
 - Докажите, что прямая Обера перпендикулярна прямой Гаусса.
 - Докажите, что если четырёхугольник $ABCD$ вписанный, то прямая Обера четырёх прямых, содержащих его стороны, проходит через точку пересечения диагоналей.

7. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки X и Y соответственно. Прямая XY пересекает окружность (ABC) в точках P и Q . Докажите, что середины отрезков BY , CX , XY и PQ лежат на одной окружности.
8. Докажите, что середины трёх отрезков, соединяющих проекции произвольной точки плоскости на пары противоположных сторон или диагоналей вписанного четырёхугольника, лежат на одной прямой.

Линейное движение. Добавка

1. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $PQ \parallel BC$. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке K . Точка A' симметрична точке A относительно прямой BC . Отрезок $A'K$ пересекает окружность (APQ) в точке S . Докажите, что окружность (BSC) касается окружности (APQ) .
2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω с центром в точке O . Диагонали AC и BD пересекаются в точке P . На отрезке OP выбрана точка Q . Точки E и F — проекции Q на прямые AD и BC соответственно. Точки M и N на окружности (QEF) таковы, что $QM \parallel AC$ и $QN \parallel BD$. Прямые ME и NF пересекаются в точке X . Докажите, что $CX = DX$.
3. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Прямая ℓ пересекает прямые AI , BI и CI в точках D , E и F соответственно. Серединные перпендикуляры к отрезкам AD , BE и CF образуют треугольник Δ с описанной окружностью ω . Докажите, что окружности ω и (ABC) касаются.

Дробно-линейное движение

Определение. Пусть точка B зависит от точки A . Будем говорить, что точка B *двигается с сохранением двойных отношений точки A* , если для любых четырёх положений точки A : A_1, A_2, A_3, A_4 , соответствующие им положения точки B : B_1, B_2, B_3, B_4 , будут давать такое же двойное отношение: $(A_1, A_2, A_3, A_4) = (B_1, B_2, B_3, B_4)$. Аналогично можно говорить про прямые, проходящие через фиксированную точку.

Утверждение 0. Если B получается из точки A преобразованием, сохраняющим двойное отношение, или цепочкой таких преобразований, то B будет сохранять двойные отношения A .

Вопрос. Кажется, почти все преобразования сохраняют двойные отношения. Приведите какие-нибудь примеры зависимости одной точки от другой, чтобы двойные отношения не сохранялись, при этом зависимость была более менее простая.

Утверждение 1. Если точки B и C двигаются с сохранением двойных отношений точки A по одной и той же прямой (окружности) и при этом при трёх положениях точки A (для трёх моментов времени) точки B и C совпадают, то они всегда совпадают.

Рекомендация. Всегда сводите задачу именно к совпадению двух объектов, сохраняющих двойные отношения друг друга.

Пример 1. На высоте BH треугольника ABC выбрана произвольная точка P . Прямые AP и CP пересекают прямые BC и AB в точках A_1 и C_1 соответственно. Докажите, что HB — биссектриса угла A_1HC_1 .

Решение. Сам бог велел двигать точку P по высоте BH . Тогда точки A_1 и C_1 будут сохранять двойные отношения точки P , потому что получаются из неё проекциями из точек A и C соответственно. Рассмотрим теперь точку F на прямой BC такую, что $\angle FHB = \angle C_1HB$. Её можно получить из точки C_1 отразив симметрично относительно высоты BH и спроецировав из точки H . Так как оба преобразования сохраняют двойные отношения, то точка F всё ещё сохраняет двойные отношения точки P и должна вообще говоря по задаче совпадать с точкой A_1 . Собственно, если в три момента времени так будет, то пользуясь утверждением 1 мы решим задачу. В качестве частных случаев подходят положения P совпадающие с B , H и ортоцентром треугольника ABC . Проверьте сами.

Записать сохранение двойных отношении можно используя стрелочную нотацию: $P \rightarrow A_1$ подразумевает, что точка A_1 сохраняет двойные отношения точки P . *Нотация не является общепринятой!* Аналогично можно записать вторую часть $P \rightarrow C_1 \rightarrow HC_1 \rightarrow HF \rightarrow F$. Здесь мы заодно показали как можно формально обосновать сохранение двойных отношений точкой F используя прямые в качестве промежуточных «мостиков».

Замечание. Это же решение можно оформить совершенно не используя терминологию движения точек, частных случаев и вот этого всего. Покажем как.

Решение. Проведём высоты AH_a и CH_c , которые пересекаются в точке K и введём точку F как в первом решении. Тогда

$$(B, A_1, H_a, C) = (B, P, K, H) = (B, C_1, H_c, A) = (HB, HC_1, HH_c, HA) = \\ = (HB, HF, HH_a, HC) = (B, F, H_a, C).$$

Откуда очевидно $F = A_1$, ч. т. д. (довольно короткая запись, неправда ли?)

Совет. Как искать положения? Как видно из формы решения двигать можно любую из точек в цепочке. Каждая точка двигается по какой-то своей траектории и может иметь на ней свои «хорошие» положения. Поэтому для поиска положений надо задать вопрос: «Какие точки двигаются? По чему они двигаются? (не просто «по прямой», а, например, «по медиане/биссектрисе») Какие хорошие положения есть на этой штуке? В разобранным примере мы двигали точку по высоте, поэтому хорошими положением был ортоцентр.

Подсказка. Так как решение происходит на проективной плоскости (иначе двойным отношениям «худо»), то часто одно из «хороших» положений это бесконечно удалённая точка прямой, по которой двигается точка.

Учебное задание. В первых трёх задачах надо решить через движение точек, а сдать можно *только* записав это решение через проецирование двойных отношений.

1. На отрезках биссектрис AK , CL треугольника ABC взяты точки P и Q так, что $\angle QBA = \angle PBC$. Докажите, что прямые AQ и CP пересекаются на биссектрисе угла ABC . (без леммы об изогоналях, пожалуйста)
2. Внешние биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC с наименьшей стороной BC пересекаются в точке I_A . На отрезках BC_1 , CB_1 взяли точки X и Y соответственно так, что XY проходит через I_A . Докажите, что отражения прямых CX и BY относительно осей CI_A и BI_A соответственно пересекаются на прямой B_1C_1 .
3. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BH выбрана произвольная точка P . Точки A' и C' — середины сторон BC и AB соответственно. Перпендикуляр, опущенный из A' на CP , пересекается с перпендикуляром, опущенным из C' на AP , в точке K . Докажите, что точка K равноудалена от точек A и C .
4. Через точку X внутри параллелограмма $ABCD$ проведены прямые, параллельные его сторонам. Они пересекают стороны AB , BC , CD и DA в точках P , Q , R , S соответственно. Докажите, что прямые DQ , BR и AX пересекаются в одной точке.
5. Внутри угла AOB выбрана произвольная точка M . Точки P и Q выбраны на сторонах этого угла таким образом, что $\angle PMO = \angle QMO$. Докажите, что всевозможные прямые PQ проходят через одну и ту же точку.
6. Дан четырёхугольник $ABCD$, удовлетворяющий условиям $AB = BC$, $AD = DC$ и $\angle BCD = \angle DAB = 90^\circ$. На отрезках AD и CD выбраны точки X и Y соответственно так, что $BX \perp AY$. Докажите, что $CX \perp BY$.

7. Четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром I . На отрезках AI , CI отмечены точки X и Y так, что $\angle XBY = \frac{1}{2}\angle ABC$. Докажите, что $\angle XDY = \frac{1}{2}\angle ADC$.
8. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно таким образом, что $AP = CQ$. Обозначим через M — середину AC , а через K — точку пересечения отрезков AQ и CP . **(а)** Докажите, что точка, симметричная K относительно M , лежит на биссектрисе угла B . **(б)** Разберите в этой задаче 6 разных положений.

Иногда кажется, что никаких произвольных точек нигде не выбрано и может возникнуть вопрос «что же тогда двигать?». Тогда можно двигать какую-нибудь одну вершинку, чтобы перебрать все возможные треугольники.

9. Точки K и L на стороне AC треугольника ABC выбраны таким образом, что $\angle ABK = \angle CBL = 90^\circ$. Докажите, что середина высоты, опущенной из вершины B , середина отрезка KL и центр описанной окружности треугольника ABC лежат на одной прямой.

Дробно-линейное движение. Добавка

1. Пять прямых пересекаются в одной точке. В каждый из десяти углов вписано по окружности; окружности касаются друг друга по циклу. На сторонах углов отмечено по точке. Известно, что для всех углов, кроме одного, отрезок, соединяющий отмеченные точки на сторонах, касается вписанной в угол окружности. Докажите, что для оставшегося угла это также верно.
2. Выпуклый шестиугольник $AQCPBR$ вписан в окружность Ω , и при этом треугольники ABC и PQR описаны около одной и той же окружности ω . Прямая ℓ , параллельная прямой BC и не совпадающая с ней, касается окружности ω . Прямая ℓ пересекает отрезок QR в точке X . Докажите, что $\angle PAB = \angle CAX$.
3. Прямая ℓ проходит через вершину A описанного четырехугольника $ABCD$, пересекает отрезок BC в точке M и прямую CD в точке N . Обозначим за I , J и K инцентры треугольников ABM , MCN и AND . Докажите, что ортоцентр треугольника IJK лежит на прямой ℓ .

Двигательный разный

1. В треугольнике ABC провели высоты AA_1 и CC_1 и отметили середины A_0 и C_0 его сторон BC и AB соответственно. Докажите, что прямые A_1C_0 и C_1A_0 пересекаются на прямой Эйлера этого треугольника.
2. Чевиины AA_1 , BB_1 , CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке. Окружность ω_A касается стороны BC в точке A_1 и “меньшей” дуги BC описанной окружности треугольника ABC в точке A' . Аналогично определены точки B' и C' . Докажите, что прямые AA' , BB' , CC' пересекаются в одной точке.
3. Для точек P и Q рассмотрим их чевианные треугольники $P_AP_BP_C$ и $Q_AQ_BQ_C$ соответственно. Пусть A' , B' и C' — точки пересечения их соответственных сторон. Докажите, что вершины треугольника ABC лежат на сторонах треугольника $A'B'C'$.
4. На высотах (но не на продолжениях высот) остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1 , B_1 , C_1 , отличные от точки пересечения высот H , такие, что сумма площадей треугольников ABC_1 , BCA_1 , CAB_1 равна площади треугольника ABC . Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A_1B_1C_1$, проходит через H .
5. На стороне AC треугольника ABC отмечены середина M и основание высоты из B — точка H . Точки P и Q в углу ABC выбраны так, что $\angle ABP = \angle CBQ$ и $BP \perp PA$, $BQ \perp QC$. Докажите, что точки P , Q , M и H лежат на одной окружности.
6. Через ортоцентр H треугольника ABC провели перпендикулярные прямые, которые пересекли стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Точка R выбрана таким образом, что $RC \parallel HP$, а $RA \parallel HQ$. Докажите, что точки P , Q и R коллинеарны.
7. Дан треугольник ABC и точка P внутри него. Через P проводится произвольная прямая. Прямые AP , BP , CP , отражённые относительно только что проведённой прямой, пересекают стороны BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.
8. Даны две непересекающиеся окружности ω и γ и к ним проведены одна их общая внешняя касательная l и одна общая внутренняя касательная k . Из точки A , лежащей на прямой k , к этим окружностям проведены вторые касательные AB и AC (B и C лежат на l), так что обе окружности лежат внутри треугольника ABC . Покажите, что если точка A двигается по прямой k , то центр I вписанной окружности треугольника ABC тоже двигается по прямой.

3 Комбинаторика

Асимптотические оценки

1. (а) Каких натуральных чисел, не превосходящих 10^{30} , больше: точных квадратов или представимых в виде суммы точного куба и шестой степени?
(б) Верно ли, что все достаточно большие натуральные числа можно представить в виде суммы точного квадрата и точного куба?
(в) Докажите, что существует такое натуральное число n , для которого уравнение $x^2 + y^3 + z^5 = n$ имеет хотя бы тысячу решений в натуральных числах.
2. На бесконечной клетчатой доске двое по очереди делают ходы. Первый за ход ставит в пустую клетку один крестик, второй за свой ход ставит в сто пустых клеток по одному нолику. Цель первого — поставить крестики
(а) в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными линиям сетки;
(б) в клетках сеточки $n \times n$ (сеточка $n \times n$ — набор клеток на пересечении n строк с n столбцами);
(в) в углах квадрата со сторонами, параллельными линиям сетки.
Может ли второй игрок ему помешать?
3. (а) Из клетчатой плоскости выкинули все клетки, обе координаты которых делятся на 4. Докажите, что её нельзя разбить на доминошки.
(б) (Классика) Из клетчатой плоскости выбросили все клетки, обе координаты которых делятся на 100. Можно ли все оставшиеся клетки обойти шахматным конём, побывав на каждой ровно по одному разу?
4. Докажите, что в любой последовательности a_n различных натуральных чисел, при всех натуральных n удовлетворяющих неравенству $a_n < 100n$, найдётся число, в десятичной записи которого встречаются три цифры 7 подряд.
5. Докажите, что плоскость нельзя покрыть 99 фигурами, каждая из которых является внутренностью параболы $y = ax^2$ в некоторой системе координат (для каждой фигуры — своя система и свой коэффициент a).
6. Координатная плоскость разбита на равные многоугольники площади S . Оказалось, что для каждого многоугольника строго внутри него содержится ровно одна точка с целыми координатами, а на границе целых точек нет. Докажите, что (а) $S \geq 1$; (б) $S \leq 1$.
7. Назовём многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами *маленьким*, если при всех натуральных $n > 1000$ выполнено неравенство $|P(n)| < 1000^n$. Конечно ли множество маленьких многочленов?
8. На бесконечной клетчатой доске в клетках квадрата $n \times n$ изначально стояли n^2 пашек (в каждой клетке — по одной пашке). За один ход разрешается одной пашкой перепрыгнуть через соседнюю по стороне или диагонали пашку при условии, что клетка, на которую она приземляется, свободна; при этом пашка, через которую прыгнули, снимается с доски. Петя сделал не более $0.74n^2$ ходов. Докажите, что при всех достаточно больших n Петя сможет сделать ещё один ход.

Асимптотические оценки, часть 2

1. Могут ли значения квадратного трёхчлена с целыми коэффициентами во всех достаточно больших натуральных точках оказаться (а) точными кубами; (б) точными степенями, не ниже третьей?
2. (Финал ВсОШ-2021) Дана бесконечная клетчатая плоскость. Учительница и класс из 30 учеников играют в игру, делая ходы по очереди: сначала учительница, затем по очереди все ученики, затем снова учительница, и т. д. За один ход можно покрасить единичный отрезок, являющийся границей между двумя соседними клетками. Дважды красить отрезки нельзя. Учительница побеждает, если после хода одного из 31 игроков найдется клетчатый прямоугольник 1×2 или 2×1 такой, что у него вся граница покрашена, а единичный отрезок внутри него не покрашен. Докажите, что ученики не смогут помешать учительнице победить.
3. (а) Докажите, что при всех достаточно больших n количество чисел вида $2^a 3^b$ ($a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), принадлежащих множеству $\{1, 2, \dots, n\}$, не превосходит $\sqrt[3]{n}$.
(б) Докажите, что если возрастающая последовательность a_n натуральных чисел ограничена сверху значениями полинома $P(n)$ с вещественными коэффициентами, то элементы этой последовательности имеют в совокупности бесконечно много простых делителей.
4. Граф на n вершинах $v_1, v_2, \dots, v_n$ называется *графом хорд*, если на окружности можно провести n хорд $l_1, \dots, l_n$ так, чтобы хорды l_i и l_j пересекались для пар смежных вершин v_i, v_j и не пересекались для пар несмежных.
(а) Докажите, что существует граф, не являющийся графом хорд.
(б) Верно ли, что рёбра любого графа можно раскрасить в 10 цветов так, чтобы рёбра любого цвета образовывали граф хорд?
5. Существует ли такое 2025-значное натуральное число, перестановкой цифр которого можно получить 2025 различных 2025-значных точных квадратов?
6. На белой плоскости нарисована чёрная ограниченная клякса. Каждую минуту происходит следующее: каждая точка плоскости перекрашивается в тот цвет, который преобладает в круге радиуса 1 с центром в ней (все точки перекрашиваются одновременно). Докажите, что существует такая клякса, площадь которой через несколько минут будет хотя бы в 1000 раз больше, чем у исходной кляксы.

Непрерывность в КГ

Функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *непрерывной* в точке $x_0 \in [a, b]$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такая $\delta > 0$, что для каждого $x \in [a, b]$ выполнено $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Теорема. Непрерывная функция f на отрезке $[a, b]$ принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$.

1. Докажите или опровергните: для любого **(а)** выпуклого; **(б)** не обязательно выпуклого многоугольника и любого направления существует прямая данного направления, делящая периметр пополам.
2. Дан (не обязательно выпуклый) многоугольник и точка P , лежащая **(а)** вне; **(б)** внутри выпуклой оболочки его вершин. Докажите, что существует прямая через точку P , делящая площадь пополам. Единственна ли такая прямая?
3. Докажите, что для любого выпуклого многоугольника существует прямая, делящая пополам и площадь, и периметр.
4. (*Теорема о бутерброде*) На плоскости даны два многоугольника (многоугольники не обязательно выпуклые и могут пересекаться). Докажите, что есть прямая, делящая площадь каждого из них пополам.
Бутерброд из хлеба и колбасы можно разрезать на две равные по содержанию хлеба и колбасы части.
5. На плоскости отмечены две системы точек: $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$. Выяснилось, что для любой точки P плоскости

$$|PA_1| + |PA_2| + \dots + |PA_n| \neq |PB_1| + |PB_2| + \dots + |PB_n|.$$

Докажите, что центры масс систем $\{A_1, \dots, A_n\}$, $\{B_1, \dots, B_n\}$ совпадают.

6. Пабло нарисовал на плоскости квадрат, на каждой стороне (или продолжении стороны) отметил по точке, а затем стёр квадрат. Оказалось, что никакие два из шести отрезков, соединяющих эти четыре точки, не перпендикулярны. Казимир хочет восстановить квадрат Пабло. Какое наименьшее число способов это сделать может быть?
7. Докажите, что через любой выпуклый многоугольник можно провести две перпендикулярные прямые, делящие его на 4 равные по площади части.
8. У Эвангелисты есть «делилка на троих» для блинов. Она представляет собой три луча из одной точки под углами 120° друг к другу. Делилку можно параллельно переносить вдоль любых векторов плоскости, но нельзя поворачивать. Докажите, что любой выпуклый многоугольный блин можно разделить делилкой на три равные по площади части.

Непрерывная комбинаторика

1. В домике Копатыча припасены 15 бочонков мёда различных объёмов. Докажите, что Копатыч может разлить один бочонок на два новых так, чтобы полученные 16 бочонков можно было разбить на две группы по 8 с равным суммарным объёмом мёда.
2. В 10 одинаковых бочонках разлит квас, причём общий объём кваса меньше объёма одного бочонка. За одну операцию можно выбрать бочонок и отлить из него любое количество кваса поровну в остальные бочонки. За какое наименьшее число операций можно уравнять объёмы кваса во всех бочонках?
3. Дан набор из 99 положительных чисел с суммой S . Докажите, что есть не менее 2^{49} способов выбрать 50 из них с суммой строго больше $S/2$.
4. В 99 ящиках лежат яблоки и апельсины. Докажите, что можно так выбрать 50 ящиков, что в них окажется не менее половины всех яблок и не менее половины всех апельсинов.
5. Группа в детском саду насчитывает 30 детей. Дети встали в ряд так, что возрасты (положительные вещественные числа) любых двух соседних детей различаются не более чем на 1 год.
 - (а) Докажите, что воспитатель может построить детей парами в ряд так, чтобы в любых двух соседних в ряду парах суммарный возраст отличался не более чем на 1 год.
 - (б) Докажите, что воспитатель может построить детей тройками в ряд так, чтобы в любых двух соседних в ряду тройках суммарный возраст отличался не более чем на 1 год.
 - (в) На городской ёлке 30 детей взяли за руки в хоровод так, что возрасты любых двух соседей различаются не более чем на 1 год. Докажите, что можно разбить детей на пары и расставить пары по кругу так, чтобы суммарный возраст в каждой двух соседних парах различался бы не более чем на 1 год.
6. На продуктовом складе валяются 20 кусков сыра разных сортов. Докажите, что можно разрезать не более двух кусков так, чтобы сыр можно было разложить на две кучки, равные по весу и по цене.
7. (Классика) Даны взаимно простые натуральные числа p и q . Хозяйка испекла пирог. К хозяйке в гости придут то ли p , то ли q гостей. На какое минимальное число не обязательно равных частей ей придётся заранее разрезать пирог, чтобы его можно было раздать всем гостям поровну в обоих случаях?
8. Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.
9. В 100 ящиках лежат яблоки, апельсины и бананы. Докажите, что можно так выбрать 51 ящик, что в них окажется не менее половины всех яблок, не менее

половины всех апельсинов и не менее половины всех бананов.

Часть III

Материалы группы 10–3

1 Алгебра

Корни из единицы

В этом листике за w_k будем обозначать корень из единицы n -ой степени вида $w_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, \dots, n-1$.

Определение. Комплексный корень w_k n -ой степени из единицы называется *примитивным*, если все числа $1, w_k, w_k^2, \dots, w_k^{n-1}$ различны.

1. Докажите, что корень w_k n -ой степени из единицы примитивный тогда и только тогда, когда $\text{НОД}(k, n) = 1$.

2. Найдите:

(а) $\sigma_1 = w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1}$,

(б) $\sigma_2 = w_0 w_1 + w_0 w_2 + \dots + w_{n-2} w_{n-1}$,

(в) $w_0^m + w_1^m + \dots + w_{n-1}^m$,

(г) $\sum_{0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq 2n-1} w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_n}$, где n — простое и $w_{n+i} := w_i$.

3. Даны многочлены $P(x), Q(x), R(x)$ такие, что $P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5)$ делится на $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$. Докажите, что $P(x)$ делится на $x - 1$.

4. Выразите коэффициенты многочлена степени не выше $n-1$ через его значения в точках $1, w_1, w_1^2, \dots, w_1^{n-1}$.

5. (а) Докажите, что

$$n = (1 - w_1) \cdot (1 - w_1^2) \cdot (1 - w_1^3) \cdot \dots \cdot (1 - w_1^{n-1}).$$

Для каких других корней из единицы верно данное равенство?

(б) Для нечетных n найдите, чему равно

$$|S_n| = \left| 1 + w_1 + w_1^4 + w_1^9 + \dots + w_1^{(n-1)^2} \right|.$$

(в) Пусть теперь n — простое. Чему равно S_n^2 ?

6. Назовем конечную последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ p -уравновешенной, если все суммы вида $a_k + a_{k+p} + a_{k+2p} + \dots$ ($k = 1, 2, \dots, p$) равны между собой. Докажите, что если 50-членная последовательность p -уравновешена для $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$, то все ее члены равны нулю.

7. Докажите, что если для корней простой степени p и целых чисел α_i , $i = 1, \dots, p-1$ выполнено, что $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_{p-1} w_{p-1} = 0$, то все $\alpha_i = 0$.

8. Пусть $p > 2$ некоторое простое число. Назовем p -элементное подмножество множества чисел $\{1, 2, \dots, 2p\}$ *эффектным*, если сумма его элементов делится на p . Найдите число эффективных подмножеств.

Первообразные корни. Теория

Определение. Натуральное число a называется первообразным корнем по модулю n , если $(a, n) = 1$ и показатель числа a по модулю n равен $\varphi(n)$.

Если a первообразный корень, то $1, a, a^2, \dots, a^{\varphi(n)-1}$ — это все вычеты по модулю n , взаимно простые с n .

1. Пусть по модулю n нашелся первообразный корень a . Сколько всего существует остатков по модулю n , являющихся первообразными корнями? Как они связаны с a ?
2. Пусть p — простое число, а d — некоторый делитель $p - 1$.
 - (а) Докажите, что многочлен $x^d - 1 \in \mathbb{F}_p[x]$ имеет ровно d корней по модулю p .
 - (б) Докажите, что есть не более $\varphi(d)$ вычетов, показатель которых по модулю p равен d .
 - (в) Докажите, что есть в точности $\varphi(d)$ вычетов, показатель которых по модулю p равен d . Выведите отсюда, что по модулю p есть первообразный корень.
3. Пусть $p > 3$ — простое число. Чему равно произведение первообразных корней по модулю p , не превосходящих p ?
4. Пусть $p > 2$ — простое число.
 - (а) Докажите, что если a — первообразный корень по модулю p , то либо a , либо $a + p$ является первообразным корнем по модулю p^2 .
 - (б) Докажите, что если a — первообразный корень по модулю p^2 , то a также является первообразным корнем по модулю p^k при любом натуральном $k \geq 2$.
 - (в) Докажите, что для любого натурального k существует первообразный корень по модулю $2p^k$.

Тем самым мы доказали, что первообразные корни существуют по модулю $p^k, 2p^k$ для простого $p > 2$. Так же нетрудно проверить, что есть первообразные корни по модулям 2 и 4.

5.
 - (а) Докажите, что не существует первообразного корня по модулю 2^m при $m > 2$.
 - (б) Докажите, что первообразных корней по оставшимся модулям так же не существует.

Первообразные корни и друзья

1. Пусть p — простое число. Докажите, что $\forall n < p - 1$ верно

$$1^n + 2^n + \dots + (p-1)^n \not\equiv p.$$

2. Докажите, что 2 первообразный корень по модулю 179.
3. Пусть $p > 10$ — простое число. Докажите, что найдутся натуральные числа m, n с суммой меньше p , такие что $5^m 7^n - 1 \equiv p$.
4. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами таков, что он в каждой целой точке принимает значение сравнимое с 0 или 1 по некоторому фиксированному простому модулю p . Известно, что $P(0) = 0$, $P(1) = 1$. Докажите, что степень $P(x)$ больше или равна $p - 1$.
5. Составное число n называется *числом Кармайкла*, если для любого a взаимно простого с n верно $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$. Найдите все числа Кармайкла вида $3pq$, где p и q — простые.
6. Алексей и Сергей играют в следующую игру. Они по очереди называют цифры от 1 до 9 без повторений пока не наберется семизначное число X . Алексей побеждает, если существует некоторое натуральное число, которое при возведении в 7 степень может оканчиваться на X , в противном случае побеждает Сергей. Первый ходит Алексей. Кто победит при правильной игре?
7. Докажите, что для любого натурального числа m существует $n \in \mathbb{N}$, такое, что в десятичной записи числа 5^n содержится не менее m нулей.
8. Дано простое число $p \neq 2$ и натуральные числа a, b, c, d взаимно простые с p . Рассмотрим последовательность $x_k = \text{ord}_p(a^k c - b^k d)$. Известно, что существует такое натуральное M , для которого выполняется $x_k \leq M$ для любого индекса k . Докажите, что среди чисел x_k встречаются не более 2 различных.

Целые гауссовы числа

Определение. Комплексное число $a + bi$ называется *целым гауссовым*, если a и b — целые числа. Множество целых гауссовых чисел обозначается $\mathbb{Z}[i]$. Нормой $\|a + bi\|$ такого числа называется квадрат его модуля, то есть $a^2 + b^2$.

Определение. Целое гауссово число u кратно целому гауссовому числу v , если существует целое гауссово число w такое, что $u = vw$.

Определение. Целое гауссово число u называется обратимым, если 1 кратно u , то есть существует целое гауссово v такое, что $uv = 1$.

Определение. Ненулевое целое гауссово число u называется *простым*, если оно необратимо и имеет только тривиальные делители, то есть обратимые числа, а также произведения обратимых чисел на u . Необратимые числа, не являющиеся простыми, называются *составными*.

1. Найдите все обратимые целые гауссовы числа.
2. (а) Докажите, что для целых гауссовых чисел возможно деление с остатком: для любых $a, b \in \mathbb{Z}[i]$, $b \neq 0$, существуют $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ такие, что $a = bq + r$ и $\|r\| < \|b\|$. *Замечание.* Такие q и r определены, вообще говоря, неоднозначно.
(б) Осознайте, что для нахождения НОД двух гауссовых чисел можно применять алгоритм Евклида, как и для обычных целых. Докажите, что если a, b — два гауссовых целых числа и $d = (a, b)$ — их НОД, то существуют целые гауссовы x, y такие, что $d = ax + by$.
(в) **Лемма Евклида.** Докажите, что если p — простое гауссово и ab делится на p , то a или b делится на p .
(г) **Основная теорема арифметики.** Докажите, что любое целое гауссово число, отличное от обратимых, единственным образом (с точностью до порядка множителей и умножения на обратимые) представляется в виде произведения простых гауссовых.
3. Пусть целое гауссово число z не является ни чисто мнимым, ни чисто вещественным.
(а) Докажите, что если его норма — простое натуральное число, то z является простым гауссовым.
(б) Докажите, что если z является простым гауссовым, то его норма — простое натуральное число.
4. (а) Докажите, что натуральное простое число p либо является простым гауссовым числом, либо представляется в виде $z\bar{z}$, где $z = a + bi$, $\bar{z}$ — простые гауссовы числа.
(б) Докажите, что простое число вида $4k + 3$ является простым гауссовым.
(в) Докажите, что простое $p = 4k + 1$ представляется в виде произведения сопряжённых простых гауссовых чисел.
(г) Используя предыдущий пункт, докажите, что простое число вида p представляется в виде суммы квадратов, если и только если $p = 2$ или $p = 4k + 1$,

причём в этом случае такое представление единственно.

5. **Рождественская теорема Ферма.** Какие натуральные числа представляются в виде суммы двух квадратов?
6. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x^2 + y^2 = 5^{100}$.
7. Решите в целых числах уравнение
 - (а) $x^2 + 1 = y^3$
 - (б) $x^2 + 4 = y^3$.

2 Геометрия

Проективные преобразования

Определение. *Проективным преобразованием* проективной плоскости называется композиция нескольких центральных проекций и аффинных преобразований.

Альтернативное определение. Проективное преобразование — это биективное отображение проективной плоскости в себя, сохраняющее коллинеарность любых трёх коллинеарных точек.

- Для любой прямой существует проективное преобразование, которое переводит её в бесконечно удалённую.
 - Проективные преобразования сохраняют двойные отношения четырёх точек, лежащих на одной прямой.
1. На плоскости даны две пересекающиеся прямые ℓ и m и точка P , не лежащая ни на одной из них. Рассмотрим всевозможные четырёхугольники $ABCD$ такие, что A и B лежат на ℓ , C и D лежат на m , прямые AD и BC пересекаются в точке P . Докажите, что ГМТ пересечения диагоналей четырёхугольников $ABCD$ является прямой.
 2. *Теорема Паппа.* Точки A, B, C лежат на одной прямой; точки A_1, B_1, C_1 лежат на другой прямой. Докажите, что точки пересечения пар прямых AB_1 и A_1B , BC_1 и B_1C , CA_1 и C_1A лежат на одной прямой.
 3. Два треугольника назовём *перспективными*, если прямые, соединяющие их соответственные вершины, пересекаются в одной точке.
 - (а) *Теорема Дезарга.* Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что они перспективны тогда и только тогда, когда точки пересечения прямых AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , CA и C_1A_1 лежат на одной прямой.
 - (б) Известно, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ перспективны и треугольники ABC и $B_1C_1A_1$ перспективны. Докажите, что треугольники ABC и $C_1A_1B_1$ тоже перспективны.
 4. На проективной плоскости даны точки A, B, C, D , никакие три из которых не лежат на одной прямой, и точки A_1, B_1, C_1, D_1 , удовлетворяющие тому же условию. Докажите, что проективное преобразование, переводящее одну четвёрку точек в другую
 - (а) существует; (б) единственно.
 5. Докажите, что с помощью одной линейки невозможно разделить данный отрезок пополам.
 6. На листе бумаги нарисованы точка A и две прямые, пересекающиеся в точке B вне листа. При помощи одной линейки нарисуйте на листе прямую AB .
 7. На прямой a выбраны точки $A_1, A_2, \dots, A_n$, а на прямой b — точки $B_1, B_2, \dots, B_n$ так, что

$$A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n, \quad B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = B_{n-1}B_n.$$

Докажите, что точки пересечения прямых $A_i B_{i+1}$ и $B_i A_{i+1}$, где $i = 1, \dots, n-1$, лежат на одной прямой.

8. Докажите, что любой выпуклый пятиугольник проективно эквивалентен пятиугольнику, образованному точками пересечения его диагоналей.

Проективные преобразования окружности

Утверждение. Существует проективное преобразование, которое окружность оставляет на месте, а данную точку внутри окружности переводит в центр этой окружности.

При этом в бесконечно удалённую прямую переходит полярная точка.

Полезное наблюдение. При проективном преобразовании сохраняются отношения отрезков на прямых, параллельных исключительной (и только на них).

1. Внутри окружности отмечена точка S , через которую проходят хорды AC , BD , $A'C'$, $B'D'$. Прямые AB и $A'B'$ пересекаются в точке X , прямые CD и $C'D'$ — в точке Y . Докажите, что точки X , Y , S лежат на одной прямой.
2. Докажите, что в описанном четырёхугольнике точка пересечения диагоналей совпадает с точкой пересечения диагоналей четырёхугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами.
3. В окружность вписан шестиугольник $ABCDEF$. Точки K , L , M , N — пересечения пар прямых AB и CD , AC и BD , AF и DE , AE и DF . Докажите, что если три из этих точек лежат на одной прямой, то и четвёртая точка лежит на этой прямой.
4. *Теорема о бабочке.* Пусть O — середина хорды MN окружности. AB и CD — произвольные хорды, проходящие через O , P и Q — точки пересечения AD и BC с MN . Докажите, что O — середина отрезка PQ .
5. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается его сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 . Внутри окружности ω отмечена точка P . Отрезки AP , BP , CP пересекают ω в точках A_2 , B_2 , C_2 . Докажите, что прямые A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 пересекаются в одной точке.
Обратите внимание, что в этой задаче несколько случаев!
6. В треугольнике ABC проведены чевианы AA_1 , BB_1 , CC_1 , пересекающиеся в точке P . Из точек A_1 , B_1 , C_1 проведены касательные ко вписанной окружности, отличные от сторон треугольника. Соответственные точки касания обозначены через A_2 , B_2 , C_2 . Докажите, что прямые AA_2 , BB_2 , CC_2 пересекаются в одной точке,
 - (а) если P лежит внутри вписанной окружности;
 - (б) если P лежит вне вписанной окружности.

Линейное движение

Определение. Фигура (точка, прямая) движется *линейно*, если существует такой вектор $\vec{v}$, что за время t фигура смещается на вектор $t \cdot \vec{v}$.

В случае прямой имеется в виду не то, что каждая её точка смещается на вектор $\vec{v}$, а что прямая как цельный объект смещается на вектор $\vec{v}$.

Линейно будет двигаться

- середина отрезка, концы которого движутся линейно;
- прямая постоянного направления, проведённая через линейно движущуюся точку;
- точка пересечения двух прямых, которые движутся линейно.

Замечание. Если точки A и B двигаются линейно, что прямая AB скорее всего *не будет* двигаться линейно. Например, если точка A неподвижна, то прямая AB *вращается*, а это не линейное движение прямой.

1. На плоскости даны точки A и B и прямая ℓ , проходящая через точку B . По ℓ линейно движется точка C . Докажите, что у треугольника ABC линейно движутся (а) точка пересечения медиан, (б) точка пересечения высот, (в) центр описанной окружности. (г) А будет ли линейно двигаться точка пересечения биссектрис?

Пример. На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ выбраны точки M и N такие, что $BM = CN$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника AMN лежит на отрезке BD .

Решение. Начнём двигать точку M по BC от точки B к C , а точку N по CD от точки C к точке D с равными по модулю скоростями. Тогда так как в начальный момент времени $BM = CN$, а за каждый промежуток времени точки будут проходить равные расстояния, то это условие будет сохраняться.

При таком движении середина отрезка MN будет двигаться линейно. Точка пересечения медиан тогда тоже двигается линейно. Это значит, в частности, что она двигается по прямой. Значит, если она в два каких-то момента времени будет лежать на прямой BD , то она в принципе двигается по этой прямой, а значит, всегда там находится. Поищем эти два момента.

В какой-то момент времени M «доедет» до точки C . Так как $ABCD$ ромб, то точка N в этот момент окажется в точке D (так как $BM = CN$ всегда). Тогда треугольник AMN превратится в треугольник ACD , точка пересечения медиан которого очевидно лежит на BD . Аналогичным моментом «в прошлом» является момент, когда точка M находилась в B . Тогда точка N находилась в C и точка пересечения медиан треугольника ABC тоже лежала на BD . Ч. т. д.

2. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB , AC в точках C_1 , B_1 соответственно. На отрезках BC_1 , AB_1 отмечены точки P и Q соответственно, что $PC_1 = QB_1$. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой B_1C_1 .
3. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC . Прямая ℓ , перпендикулярная AC пересекает высоты AH_a , CH_c и прямую AC в точках P , Q и R соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника HPQ лежит на прямой BR .
4. В треугольнике ABC проведены медианы AM и BN . На стороне AB выбрана точка P , а на сторонах AC и BC выбраны точки L и K такие, что PL параллельно BN , а PK параллельно AM . Докажите, что отрезок LK делится медианами на три равные части.

Пример 2. По лучам AB и AC угла BAC линейно двигаются точки M и N соответственно, причём они проходят через точку A не одновременно. Докажите, что всевозможные окружности (MAN) имеют две общие точки.

Решение. Рассмотрим, как будет двигаться точка O — центр окружности (AMN) . Она будет лежать на пересечении серединных перпендикуляров к отрезкам AM и AN . Середины этих отрезков будут двигаться линейно. Направление этих серединных перпендикуляров всегда перпендикулярны сторонам угла BAC , то есть не меняются со временем. Следовательно, сами серединные перпендикуляры будут двигаться линейно, а значит, линейно будет двигаться и их точка пересечения, точка O . Значит, O двигается по некоторой прямой ℓ . Несложно показать, что она не проходит через точку A . Тогда точка A' , симметричная A относительно ℓ , будет лежать на всех окружностях (AMN) .

5. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке M , угол между ними равен 120° , $AM = MD$. На стороне BC выбрана произвольная точка E , через неё проведены прямые параллельные диагоналям, которые пересекают четырёхугольник второй раз в точках P и Q . Докажите, что центр описанной окружности треугольника PEQ лежит на прямой AD .
6. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC . На луче AO выбрана произвольная точка P . Описанные окружности треугольников APB и APC пересекают прямые AC и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что середина B_1C_1 равноудалена от точек B и C .
7. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC . На его сторонах AB , AC отмечены точки C_1 и B_1 соответственно, причем $\angle AB_1M = \angle AC_1M$. Докажите что перпендикуляры, восстановленные из точек B_1 , C_1 , M к сторонам треугольника, на которых они лежат, пересекаются в одной точке.
8. На стороне BC треугольника ABC с центром описанной окружности O выбрана точка D , а на сторонах AB и AC — точки F и E так, что $BF = DF$ и $CE = DE$.
 - (а) Докажите, что четырёхугольник $AEOF$ вписанный.
 - (б) Пусть H — ортоцентр треугольника DEF . Докажите, что $HO \parallel BC$.

Линейное движение 2

Утверждение. Если три линейно движущиеся точки лежат на одной прямой в три различных момента времени, то они всегда лежат на одной прямой.

1. (а) *Прямая Гаусса.* На плоскости проведено четыре прямых общего положения. Докажите, что середины трёх отрезков, соединяющих точку пересечения двух прямых с точкой пересечения двух оставшихся (и так для трёх разбиений прямых на пары), лежат на одной прямой.
(б) *Прямая Обера.* Докажите, что ортоцентры четырёх треугольников, образованных четырьмя прямыми общего положения, лежат на одной прямой.
(в*) Докажите, что прямая Обера перпендикулярна прямой Гаусса.
(г) Докажите, что если четырёхугольник $ABCD$ вписанный, то прямая Обера четырёх прямых, содержащих его стороны, проходит через точку пересечения диагоналей.
2. Пусть P и Q — проекции ортоцентра треугольника ABC на внутреннюю и внешнюю биссектрисы его угла B . Докажите, что PQ делит сторону AC пополам.
3. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC . К стороне AC проведён перпендикуляр, пересекающий её стороны AB , BC и AC в точках X , Y , H соответственно. Прямая BO пересекает сторону AC в точке P . Докажите, что описанные окружности треугольников ABC , BHP , BXY имеют две общие точки.
4. Через ортоцентр H треугольника ABC провели перпендикулярные прямые, которые пересекли стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Точка R выбрана таким образом, что $RC \parallel HP$, а $RA \parallel HQ$. Докажите, что точки P , Q и R коллинеарны.
5. На описанной окружности (AHC), где H — ортоцентр треугольника ABC , выбрана точка P . Прямые AP и CP пересекают прямые BC и BA соответственно в точках A_1 и C_1 . Найдите ГМТ середин отрезков A_1B_1 .
6. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки X и Y соответственно. Прямая XY пересекает окружность (ABC) в точках P и Q . Докажите, что середины отрезков BY , CX , XY и PQ лежат на одной окружности.
7. На высотах (но не на продолжениях высот) остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1 , B_1 , C_1 , отличные от точки пересечения высот H , такие, что сумма площадей треугольников ABC_1 , BCA_1 , CAB_1 равна площади треугольника ABC . Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A_1B_1C_1$, проходит через H .
8. Докажите, что середины трёх отрезков, соединяющих проекции произвольной точки плоскости на пары противоположных сторон или диагоналей вписанного четырёхугольника, лежат на одной прямой.

Дробно-линейное движение

Определение. Пусть точка B зависит от точки A . Будем говорить, что точка B *двигается с сохранением двойных отношений точки A* , если для любых четырёх положений точки A : A_1, A_2, A_3, A_4 , соответствующие им положения точки B : B_1, B_2, B_3, B_4 , будут давать такое же двойное отношение: $(A_1, A_2, A_3, A_4) = (B_1, B_2, B_3, B_4)$. Аналогично можно говорить про прямые, проходящие через фиксированную точку.

Утверждение 0. Если B получается из точки A преобразованием, сохраняющим двойное отношение, или цепочкой таких преобразований, то B будет сохранять двойные отношения A .

Вопрос. Кажется, почти все преобразования сохраняют двойные отношения. Приведите какие-нибудь примеры зависимости одной точки от другой, чтобы двойные отношения не сохранялись, при этом зависимость была более простая.

Утверждение 1. Если точки B и C двигаются с сохранением двойных отношений точки A по одной и той же прямой (окружности) и при этом при трёх положениях точки A (для трёх моментов времени) точки B и C совпадают, то они всегда совпадают.

Рекомендация. Всегда сводите задачу именно к совпадению двух объектов, сохраняющих двойные отношения друг друга.

Пример 1. На высоте BH треугольника ABC выбрана произвольная точка P . Прямые AP и CP пересекают прямые BC и AB в точках A_1 и C_1 соответственно. Докажите, что HB — биссектриса угла A_1HC_1 .

Решение. Сам бог велел двигать точку P по высоте BH . Тогда точки A_1 и C_1 будут сохранять двойные отношения точки P , потому что получаются из неё проекциями из точек A и C соответственно. Рассмотрим теперь точку F на прямой BC такую, что $\angle FHB = \angle C_1HB$. Её можно получить из точки C_1 отразив симметрично относительно высоты BH и спроецировав из точки H . Так как оба преобразования сохраняют двойные отношения, то точка F всё ещё сохраняет двойные отношения точки P и должна вообще говоря по задаче совпадать с точкой A_1 . Собственно, если в три момента времени так будет, то пользуясь утверждением 1 мы решим задачу. В качестве частных случаев подходят положения P совпадающие с B , H и ортоцентром треугольника ABC . Проверьте сами.

Записать сохранение двойных отношении можно используя стрелочную нотацию: $P \rightarrow A_1$ подразумевает, что точка A_1 сохраняет двойные отношения точки P . *Нотация не является общепринятой!* Аналогично можно записать вторую часть $P \rightarrow C_1 \rightarrow HC_1 \rightarrow HF \rightarrow F$. Здесь мы заодно показали как можно формально обосновать сохранение двойных отношений точкой F используя прямые в качестве промежуточных «мостиков».

Замечание. Это же решение можно оформить совершенно не используя терминологию движения точек, частных случаев и вот этого всего. Покажем как.

Решение. Проведём высоты AH_a и CH_c , которые пересекаются в точке K и введём точку F как в первом решении. Тогда

$$(B, A_1, H_a, C) = (B, P, K, H) = (B, C_1, H_c, A) = (HB, HC_1, HH_c, HA) = \\ = (HB, HF, HH_a, HC) = (B, F, H_a, C).$$

Откуда очевидно $F = A_1$, ч. т. д. (довольно короткая запись, неправда ли?)

Совет. Как искать положения? Как видно из формы решения двигать можно любую из точек в цепочке. Каждая точка двигается по какой-то своей траектории и может иметь на ней свои «хорошие» положения. Поэтому для поиска положений надо задать вопрос: «Какие точки двигаются? По чему они двигаются? (не просто «по прямой», а, например, «по медиане/биссектрисе») Какие хорошие положения есть на этой штуке? В разобранным примере мы двигали точку по высоте, поэтому хорошими положением был ортоцентр.

Подсказка. Так как решение происходит на проективной плоскости (иначе двойным отношениям «худо»), то часто одно из «хороших» положений это бесконечно удалённая точка прямой, по которой двигается точка.

Учебное задание. В первых трёх задачах надо решить через движение точек, а сдать можно *только* записав это решение через проецирование двойных отношений.

1. На отрезках биссектрис AK , CL треугольника ABC взяты точки P и Q так, что $\angle QBA = \angle PBC$. Докажите, что прямые AQ и CP пересекаются на биссектрисе угла ABC . (без леммы об изогоналях, пожалуйста)
2. Внешние биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC с наименьшей стороной BC пересекаются в точке I_A . На отрезках BC_1 , CB_1 взяли точки X и Y соответственно так, что XY проходит через I_A . Докажите, что отражения прямых CX и BY относительно осей CI_A и BI_A соответственно пересекаются на прямой B_1C_1 .
3. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BH выбрана произвольная точка P . Точки A' и C' — середины сторон BC и AB соответственно. Перпендикуляр, опущенный из A' на CP , пересекается с перпендикуляром, опущенным из C' на AP , в точке K . Докажите, что точка K равноудалена от точек A и C .
4. Через точку X внутри параллелограмма $ABCD$ проведены прямые, параллельные его сторонам. Они пересекают стороны AB , BC , CD и DA в точках P , Q , R , S соответственно. Докажите, что прямые DQ , BR и AX пересекаются в одной точке.
5. Дан четырёхугольник $ABCD$, удовлетворяющий условиям $AB = BC$, $AD = DC$ и $\angle BCD = \angle DAB = 90^\circ$. На отрезках AD и CD выбраны точки X и Y соответственно так, что $BX \perp AY$. Докажите, что $CX \perp BY$.

Иногда кажется, что никаких произвольных точек нигде не выбрано и может возникнуть вопрос «что же тогда двигать?». Тогда можно двигать какую-нибудь одну вершинку, чтобы перебрать все возможные треугольники. Сейчас покажем, как расшевелить даже мёртвого.

Пример 2. В трапеции $ABCD$ отметили середины M и N боковых её сторон AB и CD соответственно. Перпендикуляр, опущенный из M на AC пересекает перпендикуляр, опущенный из N на BD в точке K . Докажите, что $AK = KD$.

Решение. Зафиксируем точки A , C и D и будем двигать точку B по прямой BC . Тогда точка M получается гомотетией точки B с центром в A и коэффициентом $1/2$, поэтому движется с сохранением двойных отношений точки B . Прямая DB очевидно сохраняет двойные отношения точки B . Так как перпендикуляры из точки N к DB проходят через одну точку и получаются поворотом на 90° , то они тоже сохраняют двойные отношения точки B . Пересечём перпендикуляр из точки M с серединным перпендикуляром к AD в точке F_1 , а перпендикуляр из N — в точке F_2 . Так как F_1 — проекция M из бесконечно удалённой точки направления, перпендикулярного прямой AC , то F_1 сохраняет двойные отношения M , а точка F_2 сохраняет двойные отношения перпендикуляров из N . То есть $B \rightarrow M \rightarrow F_1$ и $B \rightarrow DB \rightarrow NF_2 \rightarrow F_2$. Докажем, что $F_1 = F_2$ в трёх положениях.

Это очевидно, когда трапеция равнобедренная, когда $B = C$ (тогда они пересекутся в центре (ACD) и когда $B = \infty$ (тогда все перпендикуляры параллельны, а значит, пересекаются в бесконечно удалённой точке).

6. Точки K и L на стороне AC треугольника ABC выбраны таким образом, что $\angle ABK = \angle CBL = 90^\circ$. Докажите, что середина высоты, опущенной из вершины B , середина отрезка KL и центр описанной окружности треугольника ABC лежат на одной прямой.

3 Комбинаторика

Асимптотические оценки

1. (а) Каких натуральных чисел, не превосходящих 10^{30} , больше: точных квадратов или представимых в виде суммы точного куба и шестой степени?
(б) Верно ли, что все достаточно большие натуральные числа можно представить в виде суммы точного квадрата и точного куба?
(в) Докажите, что существует такое натуральное число n , для которого уравнение $x^2 + y^3 + z^5 = n$ имеет хотя бы тысячу решений в натуральных числах.
2. На бесконечной клетчатой доске двое по очереди делают ходы. Первый за ход ставит в пустую клетку один крестик, второй за свой ход ставит в сто пустых клеток по одному нолику. Цель первого — поставить крестики
(а) в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными линиям сетки;
(б) в клетках сеточки $n \times n$ (сеточка $n \times n$ — набор клеток на пересечении n строк с n столбцами);
(в) в углах квадрата со сторонами, параллельными линиям сетки.
Может ли второй игрок ему помешать?
3. (а) Из клетчатой плоскости выкинули все клетки, обе координаты которых делятся на 4. Докажите, что её нельзя разбить на доминошки.
(б) (Классика) Из клетчатой плоскости выбросили все клетки, обе координаты которых делятся на 100. Можно ли все оставшиеся клетки обойти шахматным конём, побывав на каждой ровно по одному разу?
4. Докажите, что в любой последовательности a_n различных натуральных чисел, при всех натуральных n удовлетворяющих неравенству $a_n < 100n$, найдётся число, в десятичной записи которого встречаются три цифры 7 подряд.
5. Докажите, что плоскость нельзя покрыть 99 фигурами, каждая из которых является внутренностью параболы $y = ax^2$ в некоторой системе координат (для каждой фигуры — своя система и свой коэффициент a).
6. Координатная плоскость разбита на равные многоугольники площади S . Оказалось, что для каждого многоугольника строго внутри него содержится ровно одна точка с целыми координатами, а на границе целых точек нет. Докажите, что (а) $S \geq 1$; (б) $S \leq 1$.
7. Назовём многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами *маленьким*, если при всех натуральных $n > 1000$ выполнено неравенство $|P(n)| < 1000^n$. Конечно ли множество маленьких многочленов?
8. На бесконечной клетчатой доске в клетках квадрата $n \times n$ изначально стояли n^2 пашек (в каждой клетке — по одной пашке). За один ход разрешается одной пашкой перепрыгнуть через соседнюю по стороне или диагонали пашку при условии, что клетка, на которую она приземляется, свободна; при этом пашка, через которую прыгнули, снимается с доски. Петя сделал не более $0.74n^2$ ходов. Докажите, что при всех достаточно больших n Петя сможет сделать ещё один ход.

Асимптотические оценки, часть 2

1. Могут ли значения квадратного трёхчлена с целыми коэффициентами во всех достаточно больших натуральных точках оказаться (а) точными кубами; (б) точными степенями, не ниже третьей?
2. (Финал ВсОШ-2021) Дана бесконечная клетчатая плоскость. Учительница и класс из 30 учеников играют в игру, делая ходы по очереди: сначала учительница, затем по очереди все ученики, затем снова учительница, и т. д. За один ход можно покрасить единичный отрезок, являющийся границей между двумя соседними клетками. Дважды красить отрезки нельзя. Учительница побеждает, если после хода одного из 31 игроков найдется клетчатый прямоугольник 1×2 или 2×1 такой, что у него вся граница покрашена, а единичный отрезок внутри него не покрашен. Докажите, что ученики не смогут помешать учительнице победить.
3. (а) Докажите, что при всех достаточно больших n количество чисел вида $2^a 3^b$ ($a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), принадлежащих множеству $\{1, 2, \dots, n\}$, не превосходит $\sqrt[3]{n}$.
(б) Докажите, что если возрастающая последовательность a_n натуральных чисел ограничена сверху значениями полинома $P(n)$ с вещественными коэффициентами, то элементы этой последовательности имеют в совокупности бесконечно много простых делителей.
4. Граф на n вершинах $v_1, v_2, \dots, v_n$ называется *графом хорд*, если на окружности можно провести n хорд $l_1, \dots, l_n$ так, чтобы хорды l_i и l_j пересекались для пар смежных вершин v_i, v_j и не пересекались для пар несмежных.
(а) Докажите, что существует граф, не являющийся графом хорд.
(б) Верно ли, что рёбра любого графа можно раскрасить в 10 цветов так, чтобы рёбра любого цвета образовывали граф хорд?
5. Существует ли такое 2025-значное натуральное число, перестановкой цифр которого можно получить 2025 различных 2025-значных точных квадратов?
6. На белой плоскости нарисована чёрная ограниченная клякса. Каждую минуту происходит следующее: каждая точка плоскости перекрашивается в тот цвет, который преобладает в круге радиуса 1 с центром в ней (все точки перекрашиваются одновременно). Докажите, что существует такая клякса, площадь которой через несколько минут будет хотя бы в 1000 раз больше, чем у исходной кляксы.

Непрерывность в КГ

Функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *непрерывной* в точке $x_0 \in [a, b]$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такая $\delta > 0$, что для каждого $x \in [a, b]$ выполнено $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Теорема. Непрерывная функция f на отрезке $[a, b]$ принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$.

1. Докажите или опровергните: для любого **(а)** выпуклого; **(б)** не обязательно выпуклого многоугольника и любого направления существует прямая данного направления, делящая периметр пополам.
2. Дан (не обязательно выпуклый) многоугольник и точка P , лежащая **(а)** вне; **(б)** внутри выпуклой оболочки его вершин. Докажите, что существует прямая через точку P , делящая площадь пополам. Единственна ли такая прямая?
3. Докажите, что для любого выпуклого многоугольника существует прямая, делящая пополам и площадь, и периметр.
4. (*Теорема о бутерброде*) На плоскости даны два многоугольника (многоугольники не обязательно выпуклые и могут пересекаться). Докажите, что есть прямая, делящая площадь каждого из них пополам.
Бутерброд из хлеба и колбасы можно разрезать на две равные по содержанию хлеба и колбасы части.
5. На плоскости отмечены две системы точек: $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$. Выяснилось, что для любой точки P плоскости

$$|PA_1| + |PA_2| + \dots + |PA_n| \neq |PB_1| + |PB_2| + \dots + |PB_n|.$$

Докажите, что центры масс систем $\{A_1, \dots, A_n\}$, $\{B_1, \dots, B_n\}$ совпадают.

6. Пабло нарисовал на плоскости квадрат, на каждой стороне (или продолжении стороны) отметил по точке, а затем стёр квадрат. Оказалось, что никакие два из шести отрезков, соединяющих эти четыре точки, не перпендикулярны. Казимир хочет восстановить квадрат Пабло. Какое наименьшее число способов это сделать может быть?
7. Докажите, что через любой выпуклый многоугольник можно провести две перпендикулярные прямые, делящие его на 4 равные по площади части.
8. У Эвангелисты есть «делилка на троих» для блинов. Она представляет собой три луча из одной точки под углами 120° друг к другу. Делилку можно параллельно переносить вдоль любых векторов плоскости, но нельзя поворачивать. Докажите, что любой выпуклый многоугольный блин можно разделить делилкой на три равные по площади части.

Непрерывная комбинаторика

1. В домике Копатыча припасены 15 бочонков мёда различных объёмов. Докажите, что Копатыч может разлить один бочонок на два новых так, чтобы полученные 16 бочонков можно было разбить на две группы по 8 с равным суммарным объёмом мёда.
2. В 10 одинаковых бочонках разлит квас, причём общий объём кваса меньше объёма одного бочонка. За одну операцию можно выбрать бочонок и отлить из него любое количество кваса поровну в остальные бочонки. За какое наименьшее число операций можно уравнять объёмы кваса во всех бочонках?
3. Дан набор из 99 положительных чисел с суммой S . Докажите, что есть не менее 2^{49} способов выбрать 50 из них с суммой строго больше $S/2$.
4. В 99 ящиках лежат яблоки и апельсины. Докажите, что можно так выбрать 50 ящиков, что в них окажется не менее половины всех яблок и не менее половины всех апельсинов.
5. Группа в детском саду насчитывает 30 детей. Дети встали в ряд так, что возрасты (положительные вещественные числа) любых двух соседних детей различаются не более чем на 1 год.
 - (а) Докажите, что воспитатель может построить детей парами в ряд так, чтобы в любых двух соседних в ряду парах суммарный возраст отличался не более чем на 1 год.
 - (б) Докажите, что воспитатель может построить детей тройками в ряд так, чтобы в любых двух соседних в ряду тройках суммарный возраст отличался не более чем на 1 год.
 - (в) На городской ёлке 30 детей взяли за руки в хоровод так, что возрасты любых двух соседей различаются не более чем на 1 год. Докажите, что можно разбить детей на пары и расставить пары по кругу так, чтобы суммарный возраст в каждой двух соседних парах различался бы не более чем на 1 год.
6. На продуктовом складе валяются 20 кусков сыра разных сортов. Докажите, что можно разрезать не более двух кусков так, чтобы сыр можно было разложить на две кучки, равные по весу и по цене.
7. (Классика) Даны взаимно простые натуральные числа p и q . Хозяйка испекла пирог. К хозяйке в гости придут то ли p , то ли q гостей. На какое минимальное число не обязательно равных частей ей придётся заранее разрезать пирог, чтобы его можно было раздать всем гостям поровну в обоих случаях?
8. Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.
9. В 100 ящиках лежат яблоки, апельсины и бананы. Докажите, что можно так выбрать 51 ящик, что в них окажется не менее половины всех яблок, не менее

половины всех апельсинов и не менее половины всех бананов.

Часть IV

Тренировочные олимпиады

Тренировочная олимпиада, 4 задачи

1. Найдите все тройки действительных чисел x, y, z такие, что выполнены неравенства

$$1 + x^4 \leq 2(y - z)^2, \quad 1 + y^4 \leq 2(z - x)^2, \quad 1 + z^4 \leq 2(x - y)^2.$$

2. Андрей и Виктор играют в следующую игру. Изначально есть n кучек в каждой из которых лежит некоторое количество камней. На каждом ходу Андрей кладёт один камень в одну из кучек, а Виктор — $n - 1$ камень, но как-то распределяет их между кучками. Ходы делаются по очереди. Докажите, что Виктор может играть так, что после одного из ходов количество камней во всех кучках будет делиться на некоторое отличное от 1 натуральное число.
3. Натуральные числа m и n , большие 1, таковы, что

$$[m + 2, n + 2] - [m + 1, n + 1] = [m + 1, n + 1] - [m, n].$$

Докажите, что одно из чисел m и n делится на другое.

4. Дан остроугольный треугольник ABC . Обозначим его центр вписанной окружности и ортоцентр через I и H соответственно. Точка K такова, что

$$AH + AK = BH + BK = CH + CK.$$

Докажите, что H, I, K лежат на одной прямой.

Тренировочная олимпиада, 5 задач

1. Действительные числа $x_1, x_2, \dots, x_{1000}$ таковы, что выполнены равенства

$$x_1^2 = (x_1 + x_2)^2 = \dots = (x_1 + x_2 + \dots + x_{1000})^2.$$

Для какого наибольшего натурального n можно утверждать, что среди этих чисел гарантированно найдётся хотя бы n одинаковых?

2. В чемпионате участвовало $2n$ футбольных команд и был сыгран $2n - 1$ тур. В каждом туре все команды разбивались на n пар и играли между собой. Под конец чемпионата оказалось, что каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу. Кроме того, в каждом матче одна команда была хозяином, а другая — гостем. Назовём команду путешествующей, если в любых двух подряд идущих турах она была и хозяином, и гостем. Докажите, что всего было не более двух путешествующих команд.
3. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром в точке O . Высота из точки A повторно пересекает ω в точке D . Описанная окружность треугольника DOC повторно пересекает сторону AC в точке E . Точка M — середина BE . Докажите, что $DE \parallel OM$.
4. В таблице 100×100 отмечено несколько клеток. Вася хочет разрезать квадрат на несколько прямоугольников так, чтобы каждый прямоугольник содержал не более двух отмеченных клеток, и при этом прямоугольников, содержащих меньше двух отмеченных клеток, было не более k . Каково наименьшее значение k , при котором Вася гарантированно сможет это сделать?
5. Натуральные числа m и n , большие 1, таковы, что

$$[m + 2, n + 2] - [m + 1, n + 1] = [m + 1, n + 1] - [m, n].$$

Докажите, что одно из чисел m и n делится на другое.