И снова здравствуйте, товарищ Колмогоров!

1. На клетчатой доске 28×28 все 28 клеток диагонали, идущей из левого верхнего угла доски в правый нижний, покрашены в чёрный цвет. Хромая ладья за один ход переходит из клетки в соседнюю с ней по стороне. Хромая ладья обошла все клетки доски, побывав в каждой ровно один раз (в частности, она не возвращалась в начальную клетку). Докажите, что в какой-то момент ладья сошла с чёрной клетки, а следующим ходом пришла на чёрную.

2. Положительные числа α, β и γ таковы, что каждое из чисел $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}$,
$\sqrt{\alpha+1}+\sqrt{\beta+1}+\sqrt{\gamma+1}$ и $\dfrac{\sqrt{\alpha+1}+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta+1}+\sqrt{\beta}}+\dfrac{\sqrt{\beta+1}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\gamma+1}+\sqrt{\gamma}}+\dfrac{\sqrt{\gamma+1}+\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha+1}+\sqrt{\alpha}}$ рациональное. Докажите, что число

$$\frac{\sqrt{\alpha+1}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta+1}-\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{\beta+1}-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\gamma+1}-\sqrt{\gamma}}+\frac{\sqrt{\gamma+1}-\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha+1}-\sqrt{\alpha}}$$

также рациональное.

3. Четырехугольник $ABCD$ с наибольшей стороной AD описан вокруг окружности диаметра d. Докажите, что если $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$, то $d > AB + BC + CD - AD$.

4. Верно ли, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые не представимы в виде $\pm m^{17} \pm p$, где m — натуральное число, а p — простое число?

5. Назовём правым сапогом вертикальную полоску из $k \geqslant 1$ клетки, к нижней клетке которой справа приклеена ещё одна клетка. Левый сапог определяется аналогично, только приклеиваемая клетка находится слева, и $k \geqslant 2$ (то есть горизонтальная доминошка — правый сапог, но не левый). Рассмотрим клетчатую лесенку ширины 100: это доска 100×100, из который убрали все клетки строго над главной диагональю, идущей из левого нижнего угла в правый верхний. Докажите, что в любом её разбиении на правые и левые сапоги найдутся хотя бы 50 левых сапогов.

6. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, 2n+1$. Обязательно ли можно окрасить все числа $1, 2, \ldots, 2n+1$ в красный и синий цвета так, чтобы при любом $i = 1, 2, \ldots, 2n+1$ числа $i, i+1, i+2$ не были все красными, и числа a_i, a_{i+1}, a_{i+2} не были все синими? Числа и индексы берутся по модулю $2n+1$.

7. Найдите все пары приведённых многочленов $P(x)$, $Q(x)$ с комплексными коэффициентами такие, что $P(x)^2+1$ делится на $Q(x)$ и $Q(x)^2+1$ делится на $P(x)$. Напомним, что многочлен называется приведённым, если его старший коэффициент равен 1.

8. **(а)** На плоскости даны n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Докажите, что квадрат наименьшего радиуса круга, содержащего все эти точки, равен …

(б) В пространстве даны n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Докажите, что квадрат наименьшего радиуса шара, содержащего все эти точки, равен …

(в) В k-мерном пространстве даны n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Докажите, что квадрат наименьшего радиуса k-мерного шара, содержащего все эти точки, равен …

…наименьшему значению выражения

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mu_i\mu_j \cdot A_iA_j^2$$

по всем наборам $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ неотрицательных чисел с единичной суммой.