Числобой

1. Изначально на доске записаны несколько (больше одного) натуральных чисел. Затем каждую минуту на доску дописывается число, равное сумме кубов всех уже записанных на ней чисел (так, если бы на доске изначально были записаны числа $1, 2, 2$, то на первой минуте было бы дописано число $1^3 + 2^3 + 2^3$). Докажите, что сотое дописанное число имеет хотя бы 100 различных простых делителей.

2. Найдите все пары натуральных чисел (x, y), удовлетворяющие равенству
$$xyd = x + y + d^2,$$
где $d = \text{НОД}(x, y)$.

3. Найдите все четвёрки чисел (p, q, r, n), состоящие из простых чисел p, q, r и произвольного натурального n, удовлетворяющие равенству
$$p^2 = q^2 + r^n.$$

4. Определите все натуральные числа n такие, что числа от 1 до n можно расположить в некотором порядке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ со свойством, что число $x_1 + x_2 + \ldots + x_k$ делится на k для всех $1 \leqslant k \leqslant n$, то есть 1 делит x_1, 2 делит $x_1 + x_2$, 3 делит $x_1 + x_2 + x_3$, и так далее до n, которое делит $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

5. Найдите все пары натуральных чисел (n, k), удовлетворяющие уравнению
$$n! + n = n^k.$$

6. Определите все натуральные числа a, b, c, p, где p и $p+2$ — нечётные простые числа, и
$$2^a p^b = (p + 2)^c - 1.$$

7. Найдите все тройки положительных целых чисел $(a, b, k), k \geqslant 2$ такие, что $(a^k + b)(b^k + a)$ является степенью двойки.

8. Пусть n, m, r — натуральные числа такие, что $n > m$ и оба числа $n^2 + r$, $m^2 + r$ являются степенями двойки. Докажите, что
$$n > \frac{2m^2}{r}.$$