

Асимптотика

Основная идея листика — смотреть на большие значения параметра в задаче. Иногда полезно взять какой-то достаточно большой промежуток и оценить на нём число каких-то объектов из задачи. А потом понять, что оно растёт слишком быстро или наоборот медленно. Как правило, в задачах всё в итоге сведётся к сравнению двух функций $f(n)$ и $g(n)$ при больших значениях n . Здесь полезно понимать следующее.

- Если f и g — многочлены с положительным старшим коэффициентом, причём степень f больше степени g , то начиная с некоторого момента будет выполнено неравенство $f > g$. Более того, отношение f/g может быть сколь угодно большим. Например, квадратичная функция растёт быстрее линейной.
- Если f и g — многочлены с положительным старшим коэффициентом одинаковой степени, то с некоторого момента больше будет тот, чей старший коэффициент больше.
- Показательная функция a^n для $a > 1$ с некоторого момента будет больше значения любого фиксированного многочлена $f(n)$.

1. (а) Каких натуральных чисел, не превосходящих 10^{30} , больше: точных квадратов или представимых в виде суммы точного куба и шестой степени?
(б) Верно ли, что все достаточно большие натуральные числа можно представить в виде суммы точного квадрата и точного куба?
(в) Докажите, что при некотором натуральном N уравнение $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = N$ имеет не менее миллиона решений в натуральных числах.
2. Двое игроков играют в игру, первый каждым своим ходом отмечает одну красную точку, а второй — 100 синих точек. Докажите, что первый за несколько ходов сможет построить правильный треугольник с вершинами в красных точках.
3. (а) Из клетчатой плоскости выкинули все клетки, обе координаты которых делятся на 4. Докажите, что её нельзя разбить на доминошки.
(б) Из клетчатой плоскости выбросили все клетки, обе координаты которых делятся на 100. Можно ли все оставшиеся клетки обойти шахматным конём, побывав на каждой ровно по одному разу?
4. Координатная плоскость разбита на равные многоугольники площади S . Оказалось, что для каждого многоугольника строго внутри него содержится ровно одна точка с целыми координатами, а на границе целых точек нет. Докажите, что (а) $S \geq 1$; (б) $S \leq 1$.
5. Дана бесконечная клетчатая плоскость. Учительница и класс из 30 учеников играют в игру, делая ходы по очереди: сначала учительница, затем по очереди все ученики, затем снова учительница, и т. д. За один ход можно покрасить единичный отрезок, являющийся границей между двумя соседними клетками. Дважды красить отрезки нельзя. Учительница побеждает, если после хода одного из 31 игроков найдется клетчатый прямоугольник 1×2 или 2×1 такой, что у него вся граница покрашена, а единичный отрезок внутри него не покрашен. Докажите, что ученики не смогут помешать учительнице победить.