Линейное движение

Определение. Фигура (точка, прямая) движется *линейно*, если существует такой вектор $\vec{v}$, что за время t фигура смещается на вектор $t \cdot \vec{v}$.

В случае прямой имеется в виду не то, что каждая её точка смещается на вектор $\vec{v}$, а что прямая как цельный объект смещается на вектор $\vec{v}$.

Линейно будет двигаться

- середина отрезка, концы которого движутся линейно;
- прямая постоянного направления, проведённая через линейно движущуюся точку
- точка пересечения двух прямых, которые движутся линейно.

Пример. На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ выбраны точки M и N такие, что $BM = CN$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника AMN лежит на отрезке BD.

1. На плоскости даны точки A и B и прямая ℓ, проходящая через точку B. По ℓ линейно движется точка C. Докажите, что у треугольника ABC линейно движутся
(а) точка пересечения медиан,
(б) точка пересечения высот,
(в) центр описанной окружности.

2. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB, AC в точках C_1, B_1 соответственно. На отрезках BC_1, AB_1 отмечены точки P и Q соответственно, что $PC_1 = QB_1$. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой B_1C_1.

3. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC. На его сторонах AB, AC отмечены точки C_1 и B_1 соответственно, причем $\angle AB_1M = \angle AC_1M$. Докажите что перпендикуляры, восстановленные из точек B_1, C_1, M к сторонам треугольника, на которых они лежат, пересекаются в одной точке.

4. Через точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника провели прямые, параллельные биссектрисам соответствующих углов. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

5. На стороне BC треугольника ABC с центром описанной окружности O выбрана точка D, а на сторонах AB и AC — точки F и E так, что $BF = DF$ и $CE = DE$.
(а) Докажите, что четырёхугольник $AEOF$ вписанный.
(б) Пусть H — ортоцентр треугольника DEF. Докажите, что $HO \parallel BC$.

Утверждение. Если три линейно движущиеся точки лежат на одной прямой в три различных момента времени, то они всегда лежат на одной прямой.

6. **(а)** *Прямая Гаусса.* На плоскости проведено четыре прямых общего положения. Докажите, что середины трёх отрезков, соединяющих точку пересечения двух прямых с точкой пересечения двух оставшихся (и так для трёх разбиений прямых на пары), лежат на одной прямой.

(б) *Прямая Обера.* Докажите, что ортоцентры четырёх треугольников, образованных четырьмя прямыми общего положения, лежат на одной прямой.

(в) Докажите, что прямая Обера перпендикулярна прямой Гаусса.

(г) Докажите, что если четырёхугольник $ABCD$ вписанный, то прямая Обера четырёх прямых, содержащих его стороны, проходит через точку пересечения диагоналей.