

Корни из единицы

В этом листике за w_k будем обозначать корень из единицы n -ой степени вида $w_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, \dots, n-1$.

Определение. Комплексный корень w_k n -ой степени из единицы называется *примитивным*, если все числа $1, w_k, w_k^2 \dots w_k^{n-1}$ различны.

1. Докажите, что корень w_k n -ой степени из единицы примитивный тогда и только тогда, когда $\text{НОД}(k, n) = 1$.
2. Найдите:
 - (а) $\sigma_1 = w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1}$,
 - (б) $\sigma_2 = w_0 w_1 + w_0 w_2 + \dots + w_{n-2} w_{n-1}$,
 - (в) $w_0^m + w_1^m + \dots + w_{n-1}^m$.
3. Даны многочлены $P(x), Q(x), R(x)$ такие, что $P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5)$ делится на $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$. Докажите, что $P(x)$ делится на $x - 1$.
4. (а) Докажите, что

$$n = (1 - w_1) \cdot (1 - w_1^2) \cdot (1 - w_1^3) \cdot \dots \cdot (1 - w_1^{n-1}).$$

Для каких других корней из единицы верно данное равенство?

- (б) Для нечетных n найдите, чему равно

$$\left| (1 - w_1) \cdot (1 - w_1^2) \cdot (1 - w_1^3) \cdot \dots \cdot (1 - w_1^{\frac{n-1}{2}}) \right|.$$

- (в) Для нечетных n найдите, чему равно

$$|S_n| = \left| 1 + w_1 + w_1^4 + w_1^9 + \dots + w_1^{(n-1)^2} \right|.$$

5. Назовем конечную последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ p -уравновешенной, если все суммы вида $a_k + a_{k+p} + a_{k+2p} + \dots$ ($k = 1, 2, \dots, p$) равны между собой. Докажите, что если 50-членная последовательность p -уравновешена для $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$, то все ее члены равны нулю.
6. Докажите, что если для корней простой степени p и целых чисел $\alpha_i, i = 1 \dots p-1$ выполнено, что $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_{p-1} w_{p-1} = 0$, то все $\alpha_i = 0$.