

Частный случай теоремы Кэзи

Утверждение. Окружности ω_1 и ω_2 касаются в точке T . На ω_2 выбраны точки A и B . Обозначим длины касательных к ω_1 , проведённые из точек A и B , через t_a и t_b соответственно. Докажите, что $TA/TB = t_a/t_b$.

1. Хорды AC и BD окружности Ω пересекаются в точке E . Окружность, вписанная в криволинейный треугольник ADE касается отрезков AE и DE в точках P и Q соответственно, а ω — внутренним образом в точке T . Прямая PQ пересекает отрезок AB в точке X . Докажите, что прямая TX — биссектриса угла ATB .
2. Окружность Ω проходит через вершины B и C неравностороннего треугольника ABC и содержит внутри себя вершину A . Окружность ω касается отрезков AB и AC в точках P и Q и касается окружности Ω внутренним образом в точке T . Прямые BC и PQ пересекаются в точке X . Докажите, что прямая TX проходит через середину дуги BTC окружности Ω .

Предыдущее утверждение можно использовать в обратную сторону для доказательства того, что окружности касаются. Если для точек A, B, C и точки T на окружности ω выполнено $\frac{t_a}{TA} = \frac{t_b}{TB} = \frac{t_c}{TC}$, то окружности (ABC) и ω касаются в точке T . Однако этот критерий неудобно использовать — нужно знать точку касания. Следующее утверждение в этом плане оказывается полезнее.

Теорема Кэзи, частный случай. Предположим, на плоскости даны окружность ω и точки A, B, C вне неё, не лежащие на одной прямой. Обозначим длины отрезков касательных из точек A, B, C к окружности ω через t_a, t_b, t_c соответственно. Тогда окружность (ABC) касается окружности ω в том и только в том случае, если для некоторой расстановки знаков $+$ и $-$ выполнено соотношение

$$\pm t_a BC \pm t_b AC \pm t_c AB = 0.$$

3. **Теорема Фейербаха.** Докажите, что в неравностороннем треугольнике ABC окружность девяти точек касается (а) вписанной окружности; (б) трёх внеписанных окружностей.
4. Докажите, что в неравностороннем треугольнике расстояние от точки Фейербаха до середины одной из сторон равно сумме расстояний от точки Фейербаха до середин двух других.
5. Хорды AC и BD окружности ω пересекаются в точке X . Докажите, что радикальная ось окружностей, вписанных в криволинейные треугольники AXB и CXD , проходит через середины дуг BC и DA .
6. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Точка X на стороне AB такова, что $AX = AI$. Окружность ω , вписанная в угол BAC , содержит точку X . Докажите, что центр одной из окружностей, проходящей через точки B и C и касающейся ω внутренним образом, лежит на (ABC) .
7. Четырёхугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями вписан в окружность с центром в точке O . Касательные к окружности в точках A и C вместе с прямой BD образуют треугольник Δ . Докажите, что окружность (BOD) касается описанной окружности треугольника Δ .