

Геометрия

1. Известно, что $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$. Найдите $ab + cd$.
2. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите неравенство

$$(a + b)(b + c)(c + a) > a^3 + b^3 + c^3.$$

3. Неотрицательные числа a, b, c, A, B, C таковы, что

$$a + A = b + B = c + C = S.$$

Докажите, что $aB + bC + cA \leq S^2$.

4. Числа a, b, c, d лежат в интервале $(0, 1)$. Докажите, что

$$2\sqrt{2} \leq \sqrt{a^2 + (1 - b)^2} + \sqrt{b^2 + (1 - c)^2} + \sqrt{c^2 + (1 - d)^2} + \sqrt{d^2 + (1 - a)^2} < 4.$$

5. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

6. Докажите неравенство

$$\sqrt{99 \cdot 101} + \sqrt{98 \cdot 102} + \dots + \sqrt{2 \cdot 198} + \sqrt{1 \cdot 199} < 25 \cdot 315.$$

7. Дана невозрастающая последовательность неотрицательных чисел $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{2k+1} \geq 0$. Докажите неравенство:

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - \dots + a_{2k+1}^2 \geq (a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_{2k+1})^2.$$

8. В английском клубе вечером собрались n его членов ($n \geq 3$). По традициям клуба каждый принес с собой сок того вида, который он предпочитает, в том количестве, которое он планирует выпить в течение вечера. Согласно правилам клуба, в любой момент любые три его члена могут присесть за столик и выпить сока (каждый — своего) в любом количестве, но обязательно все трое поровну. Докажите, что для того, чтобы все члены могли в течение вечера полностью выпить принесенный с собой сок, необходимо и достаточно, чтобы доля сока, принесенного каждым членом клуба, не превосходила одной трети от общего количества.