Геометрия

1. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите наравенство

$$(a+b)(b+c)(c+a) > a^3 + b^3 + c^3.$$

2. Неотрицательные числа a, b, c, A, B, C таковы, что

$$a + A = b + B = c + C = S.$$

Докажите, что $aB + bC + cA \leqslant S^2$.

3. Числа a, b, c, d лежат в интервале $(0, 1)$. Докажите, что

$$2\sqrt{2} \leqslant \sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-d)^2}+\sqrt{d^2+(1-a)^2} < 4.$$

4. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2} \geqslant \sqrt{a^2+ac+c^2}.$$

5. Докажите неравенство

$$\sqrt{99\cdot 101}+\sqrt{98\cdot 102}+\ldots+\sqrt{2\cdot 198}+\sqrt{1\cdot 199} < 25\cdot 315.$$

6. Дана невозрастающая последовательность неотрицательных чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{2k+1} \geqslant 0$. Докажите неравенство:

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - \ldots + a_{2k+1}^2 \geqslant (a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_{2k+1})^2.$$

7. В английском клубе вечером собрались n его членов ($n \geqslant 3$). По традициям клуба каждый принес с собой сок того вида, который он предпочитает, в том количестве, которое он планирует выпить в течение вечера. Согласно правилам клуба, в любой момент любые три его члена могут присесть за столик и выпить сока (каждый — своего) в любом количестве, но обязательно все трое поровну. Докажите, что для того, чтобы все члены могли в течение вечера полностью выпить принесенный с собой сок, необходимо и достаточно, чтобы доля сока, принесенного каждым членом клуба, не превосходила одной трети от общего количества.

8. Дана последовательность $\{x_n\}$ такая, что $x_{n+2} = |x_{n+1}| - x_n$. Докажите, что она периодична.

9. Дана последовательность неотрицательных числе $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Для любого k от 1 до n обозначим через m_k величину

$$m_k = \max_{l=1,2,\ldots,k} \frac{a_{k-l+1}+a_{k-l+2}+\ldots+a_k}{l}.$$

Докажите, что при любом $\alpha > 0$ число тех k, для которых $m_k > \alpha$ меньше, чем $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{\alpha}$.