

## Разностные многочлены

**Определение.** Разностной функцией или дискретной производной функции  $f(x)$  называется функция  $\Delta f(x) \equiv f(x+1) - f(x)$ .

Дискретной производной  $k$ -го порядка функции  $f(x)$  называется функция, определяемая индуктивно как  $\Delta^k f(x) \equiv (\Delta^{k-1} f)(x+1) - (\Delta^{k-1} f)(x)$ .

- (а) Докажите равенства:  $\Delta(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \Delta f(x) + \beta \Delta g(x)$ ,  
 $\Delta(f(x) \cdot g(x)) = \Delta(f(x)) \cdot g(x+1) + f(x) \cdot \Delta(g(x))$ .

(б) Найдите явную формулу для  $\Delta^k f(x)$ .
- Докажите, что для любого многочлена  $Q(x)$  существует единственный с точностью до прибавления константы многочлен  $P(x)$ , такой что  $\Delta P(x) = Q(x)$ .
- Докажите, что функция  $f(x)$  от целого аргумента является многочленом тогда и только тогда, когда существует  $k \in \mathbb{N}$ , такое что  $\Delta^k f(x) = 0$ .
- Докажите, что функция  $f(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$  является многочленом для всех натуральных  $k$ . Чему равны его степень и старший коэффициент?
- Введём многочлен  $C_x^k \equiv \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)}{k!}$  для  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

(а) Получите явную формулу для многочлена  $\Delta C_x^k$ .

(б) **Интерполяционная формула Ньютона.** Докажите, что многочлен  $P(x)$  с вещественными коэффициентами степени  $n$  является линейной комбинацией многочленов  $C_x^0, C_x^1, \dots, C_x^n$  с вещественными коэффициентами, при этом коэффициенты определены однозначно.

(в) Пусть также известно, что  $P(x)$  принимает целые значения в точках  $m, m+1, \dots, m+n$  для некоторого целого  $m$ . Докажите, что коэффициенты из прошлого пункта являются целыми. Выведите отсюда, что  $P(x)$  принимает целые значения во всех целых точках.
- Многочлен  $P(x)$  степени  $n$  таков, что  $P(k) = 3^k$ , при  $k = 0, 1, \dots, n$ . Чему равно  $P(n+1)$ ?
- Докажите, что любое рациональное число представляет собой сумму кубов четырех рациональных чисел.
- Даны натуральные числа  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . Докажите, что при  $n > a_1 + a_2 + \dots + a_m$  верно

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k C_k^{a_1} C_k^{a_2} \dots C_k^{a_m} = 0.$$