

Разностные многочлены

Определение. Разностной функцией или дискретной производной функции $f(x)$ называется функция $\Delta f(x) \equiv f(x+1) - f(x)$.

Дискретной производной k -го порядка функции $f(x)$ называется функция, определяемая индуктивно как $\Delta^k f(x) \equiv (\Delta^{k-1} f)(x+1) - (\Delta^{k-1} f)(x)$.

1. Найдите явную формулу для $\Delta^k f(x)$.
2. Докажите, что для любого многочлена $Q(x)$ существует единственный с точностью до прибавления константы многочлен $P(x)$, такой что $\Delta P(x) = Q(x)$.
3. Докажите, что функция $f(x)$ от целого аргумента является многочленом тогда и только тогда, когда существует $k \in \mathbb{N}$, такое что $\Delta^k f(x) = 0$.
4. Докажите, что функция $f(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$ является многочленом для всех натуральных k . Чему равны его степень и старший коэффициент?
5. Введём многочлен $C_x^k \equiv \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)}{k!}$ для $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $x \in \mathbb{R}$.
(а) **Интерполяционная формула Ньютона.** Докажите, что многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами степени n является линейной комбинацией многочленов $C_x^0, C_x^1, \dots, C_x^n$ с вещественными коэффициентами, при этом коэффициенты определены однозначно.
(б) Пусть также известно, что $P(x)$ принимает целые значения в точках $m, m+1, \dots, m+n$ для некоторого целого m . Докажите, что коэффициенты из прошлого пункта являются целыми. Выведите отсюда, что $P(x)$ принимает целые значения во всех целых точках.
6. Многочлен $P(x)$ степени n таков, что $P(k) = 3^k$, при $k = 0, 1, \dots, n$. Чему равно $P(n+1)$?
7. Докажите, что любое рациональное число представляет собой сумму кубов четырех рациональных чисел.
8. Даны натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_m$. Докажите, что при $n > a_1 + a_2 + \dots + a_m$ верно

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k C_k^{a_1} C_k^{a_2} \dots C_k^{a_m} = 0.$$

9. Пусть p — простое число. Будем называть последовательность $\{x_n\}$ p -кластером, если для любого целого $a \geq 0$ найдется N , такое что при всех натуральных $m \geq N$ выражение $\sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k x_k$ делится на p^a . Докажите, что произведение двух p -кластеров является p -кластером.