

Алгебраический взгляд на степень точки

Рассмотрим окружность ω , заданную уравнением $f(x, y) = 0$, где $f(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2$. Тогда $f(x_0, y_0)$ равно степени точки (x_0, y_0) относительно ω .

Мысль 1. Можно рассмотреть сумму нескольких уравнений окружностей с коэффициентами так, чтобы получилась линейная функция. Например, разность двух уравнений.

Мысль 2. Геометрическим местом точек X таких, что $\text{Pow}_{\omega_1} X = k \cdot \text{Pow}_{\omega_2} X$ для $k \neq 1$, является либо окружность (возможно, нулевого радиуса), соосная ω_1 и ω_2 , либо пустое множество.

1. Даны две окружности ω_1 и ω_2 . Точка P лежит на первой окружности, а точка Q — на второй. Радикальная ось окружностей пересекает прямую PQ в точке X . Докажите, что $\text{Pow}_{\omega_2} P / \text{Pow}_{\omega_1} Q = -\overrightarrow{PX} / \overrightarrow{QX}$.
2. Две окружности пересекаются в точках A и B . Прямая, проходящая через точку A , вторично пересекает окружности в точках C и D . Докажите, что середины отрезков CD лежат на одной окружности.
3. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P . На диагоналях AC и BD отмечены точки K и L соответственно так, что $CK = AP$ и $DL = BP$. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения окружностей (ALC) и (BKD) , содержит точку пересечения средних линий четырёхугольника $ABCD$.
4. Секущая пересекает первую окружность в точках A_1, B_1 , а вторую — в точках A_2, B_2 . Вторая секущая пересекает первую окружность в точках C_1, D_1 , а вторую — в точках C_2, D_2 . Докажите, что точки $A_1C_1 \cap B_2D_2$, $A_1C_1 \cap A_2C_2$, $A_2C_2 \cap B_1D_1$, $B_2D_2 \cap B_1D_1$ лежат на одной окружности, соосной с данными двумя.
5. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB и AC в точках C' и B' соответственно. Прямая $B'C'$ пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках A_1 и A_2 . Аналогично определим точки B_1, B_2, C_1, C_2 . Докажите, что середины отрезков $AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2$ лежат на одной окружности.
6. На стороне BC треугольника ABC лежит точка D . Окружности, описанные около треугольников ABD и ACD , повторно пересекают стороны AC и AB в точках E и F соответственно. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AEF , проходят через фиксированную точку на медиане из вершины A , не зависящую от положения точки D на стороне BC .
7. Точка P на вписанной окружности треугольника ABC такова, что из отрезков касательных из точки P к трём внеписанным окружностям треугольника ABC можно составить прямоугольный треугольник. Докажите, что P лежит на средней линии треугольника.

8. Четырёхугольник $ABCD$ не является вписанным. Докажите, что

$$\frac{1}{\text{Pow}_{(BCD)} A} + \frac{1}{\text{Pow}_{(ACD)} B} + \frac{1}{\text{Pow}_{(ABD)} C} + \frac{1}{\text{Pow}_{(ABC)} D} = 0.$$

9. Четырёхугольник $ABCD$, в котором нет параллельных сторон, вписан в окружность ω . Через вершину A проведена прямая $\ell_a \parallel BC$, через вершину B — прямая $\ell_b \parallel CD$, через вершину C — прямая $\ell_c \parallel DA$, через вершину D — прямая $\ell_d \parallel AB$. Четырёхугольник, последовательные стороны которого лежат на этих четырёх прямых (именно в таком порядке), вписан в окружность γ . Окружности ω и γ пересекаются в точках E и F . Докажите, что прямые AC , BD , EF пересекаются в одной точке.