

Аффинные преобразования

Преобразование плоскости f называется *аффинным*, если на плоскости существуют две аффинные системы координат такие, что координаты произвольной точки A в первой системе совпадают с координатами точки $f(A)$ во второй системе. Иначе говоря, если O и O_1 — начала координат, $\vec{u}$ и $\vec{v}$, $\vec{u}_1$ и $\vec{v}_1$ — единичные вектора вдоль осей координат, то если $\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, то $\overrightarrow{O_1f(A)} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{v}_1$.

- Если $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \lambda\overrightarrow{f(C)f(D)}$.

В частности, сохраняются отношения параллельных отрезков. Из этого свойства следует, что аффинное преобразование корректно определено на векторах.

- При аффинном преобразовании прямая переходит в прямую, а параллельные прямые — в параллельные прямые.
- Любые два треугольника аффинно эквивалентны (то есть один можно перевести в другой аффинным преобразованием).

Пример. Точка пересечения медиан треугольника при аффинном преобразовании переходит в точку пересечения медиан.

Теория

1. (а) Докажите, что аффинное преобразование сохраняет отношения площадей двух треугольников, у которых есть пара параллельных сторон.
(б) Докажите, что аффинное преобразование сохраняет отношения площадей любых двух многоугольников.
2. На плоскости определена аффинная система координат. Докажите, что класс преобразований, заданных формулами вида

$$\begin{cases} x' = ax + by + c_1, \\ y' = cx + dy + c_2, \end{cases}$$

где $ad - bc \neq 0$, совпадает с классом аффинных преобразований.

3. Докажите, что следующие определения аффинных преобразований эквивалентны исходному.
(а) Непрерывное биективное отображение плоскости в себя, сохраняющее коллинеарность любых трёх коллинеарных точек.
(б*) Биективное отображение плоскости в себя, сохраняющее коллинеарность любых трёх коллинеарных точек.

Задачи

4. На сторонах AB , AC , BC треугольника ABC выбраны точки C_1 , B_1 , A_1 соответственно так, что

$$AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A.$$

Докажите, что совпадают точки пересечения медиан треугольников ABC , $A_1B_1C_1$ и треугольника, полученного в пересечении прямых AA_1 , BB_1 , CC_1 .

5. В трапеции $ABCD$ на диагоналях AC и BD отметили такие точки P и Q соответственно, что $BP \parallel CD$ и $CQ \parallel AB$. Докажите, что $PQ \parallel BC$.
6. Внутри треугольника ABC выбрана точка P . Прямые, проходящие через P параллельно AB , BC , CA , пересекают стороны BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Докажите, что

$$\frac{PA_1}{AB} + \frac{PB_1}{BC} + \frac{PC_1}{CA} = 1.$$

7. На сторонах AB , BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K , L и M соответственно, делящие эти стороны в одинаковых отношениях. Через точки B , C , D проведены прямые b , c , d , параллельные прямым KL , KM , ML соответственно. Докажите, что прямые b , c , d проходят через одну точку.
8. На сторонах BC , CA , AB треугольника ABC отмечены пары точек A_1 и A_2 , B_1 и B_2 , C_1 и C_2 соответственно. Известно, что

$$A_1B_2 \parallel AB, B_1C_2 \parallel BC, C_1A_2 \parallel CA.$$

Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ равновелики.

9. Про выпуклый пятиугольник $ABCDE$ известно, что каждая его сторона параллельна одной из его диагоналей. Прямая ℓ_a соединяет вершину A с точкой пересечения отрезков BD и CE , аналогично определены прямые ℓ_b , ℓ_c , ℓ_d , ℓ_e . Докажите, что прямые ℓ_a , ℓ_b , ℓ_c , ℓ_d , ℓ_e пересекаются в одной точке.
10. Дан четырёхугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке P , а прямые AD и BC — в точке Q . Две прямые, проходящие через эти точки, пересекают стороны четырёхугольника в четырёх точках, являющихся вершинами параллелограмма. Докажите, что центр этого параллелограмма лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей $ABCD$.