

Самоподobie

1. Сколько в среднем ходов нужно, чтобы в игре «Ханойская башня» с n дисками из произвольной конфигурации собрать все диски на первом штыре?
2. Лёлик и Болик играют в такую игру: вначале Лёлик вырезает из отрезка $[0, 1]$ интервал длины $1/2$, затем из оставшихся двух отрезков Болик вырезает интервал длины $1/4$, затем из оставшихся трех отрезков Лёлик вырезает интервал длины $1/8$, и т. д. Проигрывает тот, кто не может вырезать свой очередной интервал. Есть ли у кого-то из игроков выигрышная стратегия?
3. В нулевой момент времени появилась частица. Все частицы существуют ровно одну секунду, в конце своей жизни порождая (равновероятно, независимо друг от друга) 0, 1, 2 или 3 новые частицы.
(а) С какой вероятностью все частицы когда-нибудь умрут, если известно, что он меньше 1?
(б*) Почему эта вероятность меньше 1?
4. Можно ли раскрасить все точки квадрата и круга в чёрный и белый цвета так, чтобы множества белых точек этих фигур были подобны друг другу и множества чёрных точек также были подобны друг другу (возможно, с различными коэффициентами подобия)?
5. (а) Докажите, что на отрезке $[0, 1]$ можно выбрать такое множество $\mathcal{K}$ меры нуль, что для любого $s \in [0, 1]$ найдутся $x, y \in \mathcal{K}$, что $x - y = s$.
(б) Докажите, что внутри квадрата 1×1 существует множество меры нуль, содержащее отрезок длины 1 любого направления.
(Множество имеет меру нуль, если для каждого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть конечным или счётным набором многоугольников (отрезков) с суммой площадей (длин) меньше ε)
6. (IMO-2019) В ряд выложены n монет. Каждый ход Гарри делает следующее: если $k > 0$ монет ряда лежат решкой вверх, то Гарри переворачивает k -ую слева монету. Докажите, что Гарри рано или поздно получит ряд из одних орлов и определите (в зависимости от n) среднее число операций, которое для этого потребуется, по всем 2^n изначальным рядам.
7. Существует ли на координатной плоскости бесконечная последовательность точек $P_i = (x_i, y_i)$ с натуральными координатами такая, что для любых индексов $i > j$ выполнено хотя бы одно из неравенств

$$0 < |x_i - x_j| < 10\sqrt{i - j} \quad \text{или} \quad 0 < |y_i - y_j| < 10\sqrt{i - j}?$$