# Отбор на сборы

1. Дан остроугольный треугольник $ABC$ с $AB < AC$. Обозначим через $D$, $E$, $F$ основания высот из вершин $A$, $B$, $C$, соответственно. Описанная окружность $\Gamma$ треугольника $AEF$ пересекает описанную окружность треугольника $ABC$ в точках $A$ и $M$. Известно, что $BM$ касается $\Gamma$. Докажите, что точки $M$, $F$ и $D$ лежат на одной прямой.

2. Последовательность $\{x_n\}, n \in \mathbb{N}$ задаётся формулой $x_{n+1} = 3x_n^3 + x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, и $x_1 = \frac{a}{b}$ для натуральных $a$, $b$, причём $b \not\vdots\ 3$. Докажите, что если для некоторого $m$ число $x_m$ — квадрат рационального числа, то и $\frac{a}{b}$ — квадрат рационального числа.

3. Дан выпуклый многоугольник $P$. Назовём триангуляцию $P$ *прекрасной*, если для каждого её треугольника при его удалении ровно один из получившихся многоугольников имеет нечётное количество сторон (при удалении треугольника получается 0, 1, 2 или 3 меньших многоугольника, возможно, с общими вершинами). Докажите, что триангуляция $P$ прекрасна тогда и только тогда, когда из неё можно удалить некоторые диагонали так, чтобы все оставшиеся области стали четырёхугольниками.

   *Напоминание:* триангуляцией называется разбиение многоугольника на треугольники диагоналями, не имеющими общих точек, кроме вершин.

4. Пусть $n$ — натуральное число. Докажите, что $n^2+n+1$ не может быть записано в виде произведения двух натуральных чисел, отличающихся менее чем на $2\sqrt{n}$.

5. На столе стоят две коробки, в первой лежит 1000 шариков, пронумерованных числами от 1 до 1000, вторая коробка пустая. За один ход выбирается несколько (больше нуля) шариков из одной коробки и переносится в другую коробку. Если на прошлом ходу уже брались шарики из коробки, то снова брать из неё нельзя. Какое наибольшее количество ходов можно сделать, не выбирая один и тот же набор шариков более одного раза?

6. Дан треугольник $ABC$ с прямым углом при вершине $C$. Обозначим через $\omega$ описанную окружность треугольника $ABC$. Касательные к $\omega$, проведённые в точках $B$ и $C$, пересекаются в $P$. Точка $M$ — середина отрезка $PB$. Прямая $CM$ пересекает $\omega$ в точке $N$, а прямая $PN$ пересекает отрезок $AB$ в точке $E$. Точка $D$ на отрезке $CM$ такова, что $ED \parallel BM$. Докажите, что описанная окружность треугольника $CDE$ касается $\omega$.